

ميكانيكا الكم

الجزء الثاني

$$a_c = \frac{-\frac{i}{\hbar} H_{ca_0} \left[e^{\frac{i(E_c - E_{a_0})}{\hbar}} - e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t} \right]}{\frac{i}{\hbar} (E_c - E_{a_0}) + \frac{\Gamma}{\hbar}}$$

$$\sigma_x^p ((P)_+) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p)_-$$

$$\sigma_{(pp \rightarrow d\pi^+)} = \frac{P_\pi^2}{V_p V_\pi} |H_{f,i}^{(1)}|^2 (2S_\pi + 1) (2S_d + 1)$$

دكتور

محمد عبد الهادي العديوي

استاذ الفيزياء النظرية

كلية التربية

دكتور

عبد الرحمن فكري

استاذ الفيزياء النووية والطاقة العاليه

كلية الهندسة

جامعة عين شمس

الطبعة الاولى

١٩٩٣

حقوق الطبع محفوظة لدى المؤلفين

دار الحكيم للطباعة

اهداءات ٢٠٠٣

أ/ محمد الرحمن فكري

الإسكندرية

ميكانيكا الكم

تأليف

دكتور

محمد عبد الهادي العبدوي

استاذ الفيزياء النظرية

كلية التربية

دكتور

محمد الرحمن فكرى

استاذ الفيزياء النووية والطاقة العاليه

كلية الهندسة

جامعة عين شمس

الطبعة الأولى

١٩٩٣

حقوق الطبع محفوظة لصاحب المؤلفين
دار الحكيم للطباعة

بسم الله الرحمن الرحيم

وه نستعين

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين • وشكروه سبحانه وتعالى ان وفقنا لتقديم هذا الكتاب " ميكانيكا الكم - الجزء الثاني " وهو الثالث فى سلسلة الكتب التى نأله تعالى ان يساعدنا فى اتمامها لتزويد القارئ العربى بكسب عربية علمية على المستوى الجامعى •

مرة ثالثة راعينا ان نقدم هذا الكتاب باللغة العربية مع الابقاء على المعالجات الرياضية والقوانين الفيزيائية بحروف اللغة الانجليزية وذلك لمسيبين سبق الاشارة لهما :
١ - ان نساعد القارئ على الاستفادة من المراجع الاجنبية المتاحة •

٢ - ان المؤلفات العلمية الاجنبية على اختلاف اللغة المستخدمة فى كتابتها تسرد المعالجات الرياضية بحروف اللغة الانجليزية •

ونأمل باذن الله تعالى ان يجنى القارئ العربى الفائدة المرجوة من وراء كتابة هذا المؤلف بهذه الصورة •

يبدأ الكتاب بتقديم دلالة ديراك الخاصة بالتعبير عن الدوال الموجية والايجينية بصورة البرا والكت مع سرد بعضها الاساسيات المرتبطة بهذا الاسلوب وتوضيحها ببعض الامثلة • وفى الباب الثانى نبدأ تطبيق اسلوب دلالة ديراك على المعالجة الكمية لسألة التذبذب التوافقى البسيط واستنتاج القيم الايجينية والدوال الايجينية المرتبطة بها مع حساب عناصر مصفوفات الطاقة الازاحة وعالمية كمية التحرك الخطى لهذه المجموعة الفيزيائية •

ثم يتم فى الباب الثالث تطبيق اسلوب دلالة ديراك لسألة كمية التحرك الزاوى واستنتاج كل من القيم الايجينية والدوال الايجينية لها وايضا حساب تراكيب عناصر مصفوفاتها •

وفي الباب الرابع يتم تلخيص نظرية ديراك الخاصة بحركة الالكترون في مجال كهربي وتوضح ان الحركة المغزلية الذاتية للجسيمات الاولية هي نتيجة طبيعية لاساسيات النظرية النسبية الخاصة التي قدمها اينشتين • ثم نتبع ذلك في الباب الخامس بمعالجة مسألة تقارن اثنين من متجهات كمية الحركة الزاوية •

اما الباب السادس فيشتمل على المعالجات التقريرية في ميكانيكا الكم مع اعتبار تغير الزمن • بينما تغرد البابين السابع والثامن لمعالجة مسألة استقطار الجسيمات الاولية •

المؤلفان

عبدالرحمن فكري ر محمد عبدالهادي العدوي
جامعة عين شمس بالقاهرة

أول المحرم ١٤١٢ هـ
٢ يوليو ١٩٩٢ م

رقم الصفحة

١	الباب الأول (دلالة ديراك)
١	مقدمة تبرز بعض خصائص الدوال المرجية
٥	دلالة ديراك
١١	أمثلة محلولة ((١-١) الى (١-٤))

	الباب الثاني (المعالجة الكمية للتذبذب التوافقي البسيط في
١٦	إطار دلالة ديراك)
١٦	استنتاج مستويات الطاقة للتذبذب التوافقي
٢١	استنتاج الدوال الخاصة بالتذبذب التوافقي
٢٤	حساب عناصر مصفوفات \hat{x} ، \hat{p}

٢٧	الباب الثالث (معالجة كمية التحرك الزاوي بدلالة ديراك)
٢٨	القيم الايجينية والدوال الايجينية لكمية التحرك الزاوي
٣٤	مصفوفات J
٣٨	تراكيب مصفوفات J

	الباب الرابع (نظرية ديراك الخاصة بالمعالجة الكمية لجسيم
٤٣	الالكترون في إطار النظرية النسبية)
٤٨	علامات ديراك

٥١	الباب الخامس (مزاجه " او تقارن " كميات الحركة الزاوية)
٦٠	مزاجه اثنين من متجهات كمية الحركة الزاوية
٧١	أمثلة محلولة ((١-٥) الى (٥-٥))

٨٤	الباب السادس (نظرية الاقلاق مع اعتبار تغير الزمن)
٩٢	أمثلة محلولة ((١-٦) الى (٢-٦))

التفاعل المتبادل للمادة في اصفر صورها مع الاشعاع
الكهرومغناطيسي

١٠٩	قواعد الاختيار عند الانتقال من حالة الى اخرى بالنسبة لتفاعل
١٠٩	المتذبذب مع الاشعاع
١١١	أمثلة محلولة ((٤-٦) الى (٧-٦))
	الباب السابع (معالجة ظاهرة الاستطارة في اطار ميكانيكا الكم
١١٩	دون ذكر لتغير الزمن)
١٢١	مفهوم المقطع المستعرض للاستطارة
	العلاقة بين المقطع المستعرض في مجموعة احداثيات مركز الكتلة
١٢٤	والمقطع المستعرض في مجموعة احداثيات العمل
١٢٦	العلاقة بين سعة الاستطارة ϵ والمقطع المستعرض لها
١٢٨	المعالجة الكمية للاستطارة
١٢٩	طريقة الموجات الجزئية
١٣١	معالجة الاستطارة بطريقة التغير
١٣٧	الاستطارة التي يتم فيها تبادل جسيمات بين حزمة القذائف والهدف
١٤٠	الاستطارة واثار ذلك على المقطع المستعرض لها
١٤٤	استطارة جسيم بواسطة جسيمين آخرين في نفس اللحظة
١٤٦	أمثلة محلولة ((١-٧) الى (٢-٧))
١٥٣	الباب الثامن (معالجة الاستطارة مع اخذ تغير الزمن في الاعتبار)
١٥٤	المعالجة الكمية للاستطارة تبعاً لطريقة بورن
١٥٧	الاستطارة الزينية
١٥٧	علاقة برايت فيجنز
	كيفية تعيين كمية الحركة المغزلية لجسيم بواسطة قياس المقطع
١٦٣	المستعرض للاستطارة المشارك فيها
١٦٤	أمثلة محلولة ((١-٨) الى (٦-٨))
١٨١	المراجع

الباب الاول

دلالة ديراك (Dirac Notation)

في هذا الباب الاول نبدأ بسرد بعض الاساسيات المرتبطة بالدوال الموجية والعمليات الخطية التي تؤثر عليها وذلك في اطار أسلوب استحدثه العالم "ديراك" (Dirac) عام ١٩٢٨ • ومن المعتاد يُعرف هذا الأسلوب بدلالة ديراك (Dirac Notation) •

مقدمة :

كلنا نعلم ان كثير من الكميات الفيزيائية (مثل الازاحة • السرعة • العجلة • كمية التحرك الخطي • القوة • الخ) يُعبر عنها باتجاهات في الحيز الاحداثي المعتاد ويتميز كل منها بثلاث مركبات بالصورة المعتادة التالية حيث ترمز \vec{r} للنتيجة الذي نتكلم عنه بينما x و y و z هي المركبات الخاصة بهذا المتجه فسي اتجاهات الاحداثيات الثلاث \vec{x} و \vec{y} و \vec{z} التي تتميز بوحدات متجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} على التوالي :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \quad (1.1)$$

نعلم كذلك ان حاصل الضرب القياسي (Scalar Product) لثلاث هذا المتجه هو :

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 &= (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \cdot (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

هذا بالنسبة للتجهات في الحيز الاحداثى المعتاد $(\vec{Z}, \vec{Y}, \vec{X})$

أما بالنسبة لحيز متعدد الاحداثيات (وهو ما نحتاج اليه في اطار ميكانيكا الكم) فان معادلتى (1.1) و (1.2) تأخذان الصورتين التاليتين :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{u}_i \quad (1.3)$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (1.4)$$

حيث x_i ترمز لمركبه الشجه (عبارة عن عدد) في اتجاه وحدة الشجه \vec{u}_i بينما تكون تلك الوحدات \vec{u}_i ما يعرف بمجموعة القواعد لهذا الحيز • ولكل متجه مثل \vec{x} من المناسب تصور تواجد متجه آخر $(\vec{x})^+$ - يسمى بالمتجه المرافق في الحيز المقابل الذى يحتوى التجهات \vec{x} ويُعتبر عن $(\vec{x})^+$ بالصورة :

$$\vec{x}^+ = \sum_{i=1}^n x_i^+ \vec{u}_i^+ \quad (1.4)$$

حيث x_i^+ المرافق المركب للعدد x_i بينما \vec{u}_i^+ هى الوحدات القاعدية للتجهات الاحداثية في الحيز المقابل • مع تذكرنا ان تلك الوحدات تتصف بالميزتين المعروفتين بميزة التعامدية (Orthogonality) وميزة الميارية (Normalization) ويعبر عنها بواسطة العلاقة العامة التالية :

$$\vec{u}_i^+ \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij} \quad (1.5)$$

بمعنى ان دلتا كرونكر δ_{ij} تساوى صفرا في حالة عدم تماو $i \neq j$ بينما تساوى الوحدة في حالة $j = i$ •

هذه العلاقات الاساسية للتجهات يمكننا مقارنتها بأحد أهم خصائص الدالة الموجية ψ (Wave Function) بأنها يمكن التعبير عنها بدلالة مجموعة كاملة من الدوال :

$$\psi = \sum C_n u_n \quad (1.6)$$

حيث الدوال u_n تقابل مسألة شرودنجر بشروطها الحدية الخاصة بها أي أنها حلول معادلة شرودنجر (Schrodinger Equation):

$$\hat{H} u_n = E_n u_n \quad (1.7)$$

والمعتاد يتم تعيين المعاملات C_n 's في (1.6) باستخدام خاصية المعايير والتعامدية لتلك الدوال الايجينية u_n 's (Eigenfunctions).

نصلي سبيل المثال اذا كان لدينا دالة موجية اختيارية ψ لها مفكوك بصورة:

$$\psi = \sum_m C_m u_m \quad (1.8)$$

فانه بضرب جانبي هذه المعادلة بالمعادلة u_n^* واجراء التكامل على جميع الاحداثيات نحصل على:

$$\begin{aligned} \int u_n^* \psi \, dV &= \int \sum_m C_m u_n^* u_m \, dV \\ &= \sum_m C_m \delta_{nm} = C_n \end{aligned} \quad (1.9)$$

من ناحية أخرى فان خاصية التعامدية للدوال الايجينية ترمي أيضا الى حـسـل طم سهل لمعادلة شرودنجر بدلالة الزمن بدلا بالمعادلة:

$$\begin{aligned} \hat{H} \psi &= i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E_n \psi \\ \therefore \frac{d\psi}{\psi} &= - \frac{i E_n}{\hbar} dt \\ \therefore \psi &= \psi_0 e^{- \frac{i E_n}{\hbar} t} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\sum_n c_n u_n = \psi_0 \quad \text{ونفرض أن}$$

$$\therefore \psi = \sum_n c_n u_n e^{-\frac{i E_n}{\hbar} t} \quad (1.11)$$

ويلاحظ أنه بسبب كون معادلة شرودنجر هي معادلة ذات الرتبة الأولى بالنسبة لأحداث الزمان فذلك يعنى إمكانية تتبع الملوك المستقبلى للدالة ψ .

ونود أن نختم هذه المقدمة بأن نترجع خاصية أخرى للدالة الموجية وهى القيمة المتوسطة لأى عاظمة خطية \hat{F} " $\langle \hat{F} \rangle$ ونفرض أن \hat{F} دالة لأحداثيات الموضع q_j وأحداثيات كمية التحرك الخطى p_j . نتمسك لتعريف القيمة المتوسطة لمثل هذه العاظمة \hat{F} نجد أن :

$$\begin{aligned} \langle \hat{F} \rangle &= \int \psi^* \hat{F} \psi \, dV \\ &= \int \psi^* [\hat{F} \psi] \, dV \\ &= \int \sum_n \sum_m c_n^* c_m u_n^* \hat{F} u_m e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} \, dV \\ &= \sum_{n,m} c_n^* c_m F_{nm} e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

حيث

$$F_{nm} = \int u_n^* \hat{F} u_m \, dV \quad (1.13)$$

أى أن

$$F_{nm} = \langle n | \hat{F} | m \rangle = \text{عصر مصفوفة (Matrix Element)} \quad (1.14)$$

دلالة ديراك (Dirac Notation)

حيث أن $\langle n | \hat{F} | m \rangle$ هو في الحقيقة عنصر مصفوفة ما فإنه يمكن اعتبار هذا العنصر ناتج من عملية ضرب مصفوفة افقية (Row Matrix) في مصفوفة رأسية (Column Matrix) ولذلك أوضح ديراك أن أي حالة كمية خاصة بمجموعة ديناميكية عند لحظة زمنية ما يتم تمثيلها بنوع معين من المتجهات في حيز متعدد الاحداثيات عبر عنها ديراك بمتجهات الكت (Ket Vectors) فشلا متجه كـ K يعني مايلي - وهو ما يقابل دوال موجية مثل u_m في معادلة (1.8)

$$|K\rangle = u_m = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \equiv \text{Ket } K \quad (1.15)$$

ويستاز حيز متجهات الكت بأنه حيز اتجاهي خطي (Linear Vector Space)

بمعنى أن أي جمع خطي منها ينتج عنه متجه كت آخر (راجع مثال (١ - ٣)) .

ولكى يتيسر إجراء عملية ضرب قياسي لمتجات الكت / بمفهوم معادلة (1.5)

نصوّر ديراك وجود حيز اتجاهي آخر يقابل حيز متجهات الكت ولتسميه عنه يعبر عن متجهات بمتجهات ألبرا (Bra Vectors) فشلا متجه برا B يعني مايلي - وهو ما يقابل الدوال المرافقة u_n^* :

$$\langle B | \equiv u_n^* \equiv (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n) \equiv \text{Bra } B \quad (1.16)$$

وفيما يلي نلخص بعض أساسيات " دلالة ديراك " كما قدمها ديراك فسي

١ - أى جمع خطى لأى عدد من متجهات الكت ينتج عنه متجه كت جديد • فبمثلا إذا أخذنا متجهى كت $|A\rangle$ و $|B\rangle$ فان :

$$a |A\rangle + b |B\rangle = |Q\rangle \quad (1.17)$$

حيث $|Q\rangle$ المتجه الناتج بينما يرمز a و b الى اعداد مركبه اختيارية •

٢ - كمال للتعبير عن المعادلات الايجينية بدلالة تلك المتجهات فان معادلبسة شرودنجر تأخذ الصورة العامة التالية :

$$\hat{H} |m\rangle = E_m |m\rangle \quad (1.18)$$

حيث $|m\rangle$ الدالة الايجينية التى تتى للقيمة الايجينية (Eigenvalue) E_m للعاملة الهاملتونية \hat{H} .

٣ - الصفة التى تميز متجه كت انه ايجينى تعتمد فقط على اتجاه هذا الكت بمعنى ان ضرب هذا الكت الايجينى فى أى عدد (لايساوى صفرا) ينتج عن ذلك كت ايجينى مرة أخرى يتبع نفس القيمة الايجينية • ويلاحظ ان ذلك هو من الفروق الاساسية بين نظرية الانطباع (Superposition Principle) بالمفهوم الكلاسيكى ومفهوم ميكانيكا الكم • كما ان الملحوظة المشار اليها بـ "القرين (لايساوى صفرا) سببها ان متجه الكت "الصفرى" لا يقابل أى حالة بالرة فى ميكانيكا الكم (بينما فى الميكانيكا الكلاسيكية هذا مسموح به فمثلا فى حالة الخيط المتذبذب فان المتجه الصفرى يقابل خيطا فى حالة مستقرة •

٤ - تتبع متجهات الكت نفس القواعد التى تتبعها الصفوفات المكونة من صف رأسى واحد • بينما متجهات البرا تتبع القواعد الخاصة بالصفوفات المكونة من صف افقى واحد • فمثلا حاصل الضرب لمتجه البرا $\langle B |$ فى متجه الكت $|K\rangle$

من الناحية اليسرى لهذا الكت يؤدي الى (راجع معادلتى

$$(1.15) \quad \vdots \quad (1.16)$$

$$\langle B | K \rangle = (B_{11} \quad B_{12} \quad \dots \quad B_m) \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ K_{m1} \end{pmatrix}$$

$$= [B_{11}K_{11} + B_{12}K_{21} + \dots + B_{1r}K_{r1}] = \text{عدد } L \quad (1.19)$$

بينما تتبع العائلات الخطية نفس القواعد التى تتبعها المصفوفات المربعة

(Square Matrices) . وعلى ذلك فان حاصل ضرب عائلة خطية

مثل \hat{a} فى متجه برا مثل $\langle B |$ من الناحية اليسرى لهذا البرا ليس له معنى . بينما حاصل ضرب \hat{a} فى متجه كت مثل $|K\rangle$ من الناحية اليسرى له هو :

$$\begin{aligned} |K\rangle &= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & \dots \\ 21 & 22 & 23 & \dots \\ 31 & 32 & 33 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11K_{11} + 12K_{21} + 13K_{31} + \dots + \dots \\ 21K_{11} + 22K_{21} + 23K_{31} + \dots + \dots \\ 31K_{11} + 32K_{21} + 33K_{31} + \dots + \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = |K'\rangle \end{aligned} \quad (1.20)$$

حيث رمزنا لتجه الكت الناتج من حاصل الضرب $|K\rangle \alpha$ بالرمز $|K'\rangle$ ويمكن جعل العامل الخطية مثل α التأثير على متجه برا مثل $\langle B|$ لاعطاء نتيجة ذات معنى بأن تكتب بالصورة $\langle B|\alpha$ باعتبار الفرض التالي :

$$\{ \langle B|\alpha \} |K\rangle = \langle B| \{ \alpha |K\rangle \} \quad (1.21)$$

لأى متجه كت $|K\rangle$ (هذا الافتراض يعبر عن مبدأ الضرب المترن لكل مسن $|K\rangle$ و α و $\langle B|$ وكذلك بالنسبة لأى عدد من العوامل الخطية مثلما في حالة $\langle B|\alpha \beta \gamma \dots |K\rangle$) .
كذلك نستفيد من مبدأ الضرب المترن لاتمام حاصل الضرب $\langle B| \langle K|$ بالنسبة لأى متجه بسوا $\langle B|$ ومتجه كت $|K\rangle$ وذلك بأن نتصور أن $\{ |K\rangle \langle B| \}$ عبارة عن عامل خطية والسماح لها بالتأثير على أى متجه كت آخر وليكن $|Q\rangle$ نجد أن :

$$\{ |K\rangle \langle B| \} |Q\rangle = |K\rangle \{ \langle B|Q\rangle \}$$

وسا ان $\langle B|Q\rangle$ ينتج عنه أى عدد ما وليكن C (راجع معادلة (1.19)) :

$$\therefore \{ |K\rangle \langle B| \} |Q\rangle = |K\rangle C = C |K\rangle = |K''\rangle \quad (1.22)$$

وهذه النتيجة توضح العقولة التى اشرنا اليها بأن نتصور $\{ |K\rangle \langle B| \}$ كعامل خطية (راجع معادلة (1.20)) اذ أن $\{ |K\rangle \langle B| \}$ عدسا أثرت على أى متجه كت اختياري نتج عن ذلك متجه كت آخر $|K''\rangle$ (أو $|K\rangle$) .

٥ - كما اشرنا في صفحة (٦) بما أن $|K\rangle$ و $C|K\rangle$ تقابلان نفس الحالة الكمية فانه لتحديد هذا التقابل بصورة واضحة فان الحالة الكمية لأى نظام ديناميكي

تحدد بتحقيق شرط معادلة متجهات الكتل التي تمثل تلك الحالة • وهذا الشرط يتلخص في المعادلة :

$$\langle K | K \rangle = 1 \quad (1.23)$$

(هذه المعادلة يتضح لنا مانتعنه اذا ما تذكرنا ان $u_n^* u_m = \langle n | m \rangle$ عبارة عن حاصل ضرب قياس لهمايتين المتجهتين وبالتالي تجعلنا نعتبر على سبيل المثال $\langle \psi | x \rangle$ على انه يمثل المركبة السينية لحالة المتجه $|\psi\rangle$ وهنا فقط يكون لدينا عدد لانهاى من المركبات تقابل القيم المتصلة للمتغير x والتي تشترك مع بعضها لتكوين دالة الحالة $\psi(x)$ وعلى ذلك غيرديراك عن ذلك بالعلاقة $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ وحيث ان الصلة المعيارية للدالة تتم على $\int \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$ فان تلك الصلة يمكن اعادة كتابتها بالاسلوب التالي :

$$\begin{aligned} \int \psi^*(x) \psi(x) dx &= \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx \\ &= \int |\langle \psi | x \rangle|^2 dx = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \end{aligned}$$

وفي المعتاد يختصر كتابة هذه النتيجة على النحو التالي وكما جاء في (1.23):
 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ مع ملاحظة ان هذا الشرط يجمع بضرب المتجهات في معامل خاص بالطور مثل $|\exp(j\delta)|$ حيث δ كمية حقيقية •

٦ - اذا ما تحقق لآى متجه كت $|K\rangle$ النتيجة التالية :

$$\langle K | \alpha | K \rangle = 0 \quad (1.24)$$

فان هذا يعنى ان المعادلة α مساوية للصفر •
 بينما اذا تحقق الشرط :

$$\langle K | \alpha | K \rangle = \langle K | \beta | K \rangle \quad (1.25)$$

فان هذا يعنى ان المعاملتين الخطيتين α و β متساويتان •

٧- إذا كان لدينا اى عاملين $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ وحققنا الشرطين التاليين لأى متجه كت $|K\rangle$ فان ذلك يعنى أن هاتين الماملتين خطيتان :

$$(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) |K\rangle = \hat{\alpha} |\bar{K}\rangle + \hat{\beta} |K\rangle \quad (1.26)$$

$$, \quad \left\{ \hat{\alpha} \hat{\beta} \right\} |K\rangle = \hat{\alpha} \left\{ \hat{\beta} |K\rangle \right\} = \hat{\alpha} \hat{\beta} |K\rangle \quad (1.27)$$

مع ملاحظة أن :

$$\hat{\alpha} \hat{\beta} |K\rangle = \hat{\beta} \hat{\alpha} |K\rangle$$

إلا إذا تبادل $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ مع بعضهما حينئذ يكون :

$$\hat{\alpha} \hat{\beta} |K\rangle = \hat{\beta} \hat{\alpha} |K\rangle , \quad \hat{\alpha} \hat{\beta} - \hat{\beta} \hat{\alpha} = 0$$

٨- لاتصلح الماملة مثل $\hat{\alpha}$ لتثيل اى مشاهدة فيزيائية الا اذا حققت العلاقة التالية لأى دالتين موجيتين مثل $|\emptyset\rangle$ و $|\psi\rangle$:

$$\langle \emptyset | \hat{\alpha} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{\alpha} | \emptyset \rangle^* \quad (1.28)$$

٩- الدوال الايجينية التى تنتمى الى قيم ايجينية مختلفة لماملة ما تكون متعامدة بمعنى ان اذا كان :

$$\hat{\alpha} |a_1\rangle = a_1 |a_1\rangle , \quad \hat{\alpha} |a_2\rangle = a_2 |a_2\rangle$$

$$\therefore \quad \langle a_2 | a_1 \rangle = 0 \quad (1.29)$$

١٠- بما ان متجه الكت $|K\rangle$ المرافق له هو متجه البرا $\langle K|$ وأيضا $\langle p|$ المرافق له $\langle p|$ فان حاصل الضرب القياسى $\langle K | p \rangle$ هو المرافق لحاصل الضرب القياسى $\langle p | K \rangle$ بمعنى أن :

$$\langle K | p \rangle = \overline{\langle p | K \rangle} \quad (1.30)$$

بينما تُعرَّف المرافقة المركبة (أو الأَدْجُونِت Adjoint) لمعامل خطية
بالمعادلة التالية :

$$\langle K | \hat{a} | P \rangle = \overline{\langle P | \hat{a} | K \rangle} \quad (1.31)$$

وفي حالة المتغير الديناميكي الحقيقي فان $\hat{a} = \hat{a}^\dagger$ أى أن :
 $\langle K | \hat{a} | P \rangle = \overline{\langle P | \hat{a} | K \rangle}$ وعلى ذلك فان الصفوف التى تشمل
 المتغير الديناميكي الحقيقي هي صفوف هيرميتية
 (Hermetian Matrices)

مثال (١ - ١) :

أوجد ما يتحول اليه المرافقة لحامل الضرب $\hat{a} \hat{b}$ لمعاملتين خطيتين
 \hat{a} و \hat{b} .

الحل :

$$\hat{a} | K \rangle = | P \rangle \quad \text{نفرض أن :}$$

$$\langle K | \hat{a} | B \rangle = \langle B | \hat{a} | K \rangle : \hat{a} \text{ للمرافقة المركبة للمعادلة } \hat{a}^\dagger$$

وبوضع $\langle \hat{a} | K \rangle = | P \rangle$

$$\therefore \langle K | \hat{a} | B \rangle = \langle B | \hat{a} | K \rangle = \langle B | P \rangle = \langle P | B \rangle$$

$$\therefore \{ \langle K | \hat{a} | B \rangle \} = \langle P | B \rangle$$

وبما ان هذه النتيجة صحيحة لآى متجه $| B \rangle$

$$\therefore \langle K | \hat{a} = \langle P |$$

ولكن $\langle P |$ هي المرافقة المركبة للكت $| P \rangle$ أى المرافقة المركبة للكت $| K \rangle$

$$\therefore \langle P | = \overline{|P\rangle} = \overline{\alpha | K\rangle} = \langle K | \bar{\alpha}$$

$$|Q\rangle = \beta |K\rangle$$

وبالمثل : بوضع

فهذا معناه أن :

$$\overline{\alpha | Q\rangle} = \left\{ \langle Q | \right\} \bar{\alpha} = \left\{ \langle K | \bar{\beta} \right\} \bar{\alpha}$$

$$\therefore \overline{\alpha \beta | K\rangle} = \langle K | \bar{\beta} \bar{\alpha}$$

$$\therefore \overline{\alpha \beta} = \bar{\beta} \bar{\alpha} \quad (1.32)$$

مثال (١ - ٢) :

• اثبت نظرية التعامدية المعبر عنها في معادلة (1.29)

الحل :

$$\alpha | a_2 \rangle = a_2 | a_2 \rangle \quad \text{و} \quad \alpha | a_1 \rangle = a_1 | a_1 \rangle \quad \text{بما أن}$$

إذا بضرب المعادلة الأولى في البرا $\langle a_2 |$ من جهة اليسار وكذلك المعادلة الثانية في البرا $\langle a_1 |$ نحصل على :

$$\langle a_2 | \alpha | a_1 \rangle = \langle a_2 | a_1 | a_1 \rangle = a_1 \langle a_2 | a_1 \rangle \quad (1.33)$$

$$\langle a_1 | \alpha | a_2 \rangle = \langle a_1 | a_2 | a_2 \rangle = a_2 \langle a_1 | a_2 \rangle \quad (1.34)$$

وبأخذ المرافقة للمعادلة (1.34) ومع تذكرنا أن حقيقة :

$$\therefore \langle a_2 | \alpha | a_1 \rangle = a_2 \langle a_2 | a_1 \rangle \quad (1.35)$$

ويطرح معادلة (1.35) من معادلة (1.33) :

$$\therefore (a_1 - a_2) \langle a_2 | a_1 \rangle = \langle a_2 | \alpha | a_1 \rangle - \langle a_2 | \alpha | a_1 \rangle = 0$$

وبما أن $a_2 = a_1$

$$\therefore \langle a_2 | a_1 \rangle = 0 \quad (1.29)$$

مثال (١-٣) :

أثبت أن أي جمع خطي لاثنتين من متجهات الكت الایجينية التي تتع قيمة ایجينية واحدة ينتج عنه متجه كت ایجینی آخر يتبع نفس القيمة الایجينية .

الحل :

لنفرض أن :

$$C_1 |K_1\rangle + C_2 |K_2\rangle = |Q\rangle \quad (1.36)$$

حيث : $\alpha |K_1\rangle = a |K_1\rangle$ و $\alpha |K_2\rangle = a |K_2\rangle$ ونضرب المعادلة (1.36) في α نحصل على :

$$\begin{aligned} \alpha |Q\rangle &= \alpha C_1 |K_1\rangle + \alpha C_2 |K_2\rangle \\ &= C_1 \alpha |K_1\rangle + C_2 \alpha |K_2\rangle \\ &= C_1 a |K_1\rangle + C_2 a |K_2\rangle \\ &= a \{ C_1 |K_1\rangle + C_2 |K_2\rangle \} \\ &= a |Q\rangle \end{aligned}$$

أي أن الكت الايجينى $|a\rangle$ - وهو حاصل الجمع الخطى للكت الايجينى $|K_1\rangle$ والكت الايجينى $|K_2\rangle$ التابعتان للقيمة الايجينية a - هو كت ايجينى ايضا يتبع نفس القيمة الايجينية a .

مثال (١ - ٤) :

وضَّحْ أن اذا كانت متجهات الكت الايجينية $|n\rangle$ لى عامة خطية تحقق الشروط الثلاث التالية :

- انها تكون مجموعة كاملة (complete set) بمعنى ان أى متجه كـت اختيارى $|K\rangle$ يمكن التعبير عنه بدلالة الجمع الخطى لمتجهات الكت الايجينية $|n\rangle$:

$$|K\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad (1.37)$$

حيث a_n فى معادلة (1.37) نوابت .

- انها تتصف بخاصية المعاييرة والتعامدية (Orthonormality) بمعنى انها تحقق المعادلة التالية :

$$\langle n | m \rangle = \delta_{nm} \quad (1.38)$$

- كل من تلك المتجهات الكت الايجينية $|n\rangle$ مستقل خطيا عن الآخر بمعنى عدم امكانية التعبير عن واحد منها بدلالة الاخرى ان اذا تحقق المعادلة الرياضية التالية $\sum_n a_n |n\rangle = 0$ يكون معنى ذلك ان كـل حد من هذا المجموع يساوى صفرًا وحينئذ يكون الثابت a_n المقابل مساويا للصفر .

وضح ان اذا تحققت تلك الشروط فان :

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1. \quad (1.39)$$

حيث 1 يُعبّر عن المعامل الخطية المساوية للوحدة .

الحل :

$$|K\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad \text{بما أن :}$$

ونضرب هذه المعادلة من جهة اليسار في معجزة البرا الايجيني $\langle m|$:

$$\begin{aligned} \therefore \langle m|K\rangle &= \langle m|\left\{\sum_n a_n |n\rangle\right\} \\ &= \sum_n a_n \langle m|n\rangle = \sum_n a_n \delta_{mn} = a_m \\ &\text{راجع معادلة (1.38) . وبالمثل :} \end{aligned}$$

$$\langle n|K\rangle = a_n$$

$$\begin{aligned} \therefore |K\rangle &= \sum \{\langle n|K\rangle\} |n\rangle = \sum |n\rangle \langle n|K\rangle \\ &= \sum \{|n\rangle \langle n|\} |K\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore \sum |n\rangle \langle n| = 1 \quad (1.40)$$

الباب الثاني

المعالجة الكمية للتذبذب التوافقي البسيط في اطار دلالة ديراك

نود في هذا الباب استخدام دلالة ديراك لاستنتاج مستويات الطاقة للتذبذب
التوافقي البسيط ونعدها الدوال الموجية الخاصة به .

نعلم ان المعادلة \hat{H} الهاملتونية الخاصة بالتذبذب التوافقي البسيط هي :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{x}^2 \quad (2.1)$$

حيث \hat{x} عامل الازاحة (Displacement Operator)

ω السرعة الزاوية للتذبذب التوافقي

m كتلة التذبذب التوافقي البسيط

\hat{p} (\hat{p}_x) عامل كمية التحرك الخطي

ولنكتب هذه المعادلة بالصورة التالية :

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} \right)^2 \quad (2.1)$$

فاذا ما عرفنا عاملين $\hat{a}^+ \cdot \hat{a}$ بما يلي :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \quad (2.2)$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} - i \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \quad (2.3)$$

وإذا ما تذكرنا ان علاقة التبادل بين المادتين \hat{x} و \hat{p} هي :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \quad (2.4)$$

فان الترميز السابق للمادتين \hat{a} و \hat{a}^+ يعطيا :

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{a}^+ &= \left[\sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} - i \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \right] \\ &= \left(\frac{m}{2} \omega^2 \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \right) - \frac{i\omega}{2} (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{a}\hat{a}^+ = \hat{H} + \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (2.5)$$

وبالمثل فان :

$$\hat{a}^+ \hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2} \hbar \omega \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \therefore [\hat{a}, \hat{a}^+] &= \hat{a} \hat{a}^+ - \hat{a}^+ \hat{a} \\ &= \hat{H} + \frac{1}{2} \hbar \omega - (\hat{H} - \frac{1}{2} \hbar \omega) \end{aligned}$$

$$\therefore [\hat{a}, \hat{a}^+] = \hbar \omega \quad (2.7)$$

وبما درسناه في الباب الاول فان المعادلة الاليجينية للحالة الكلية هي :

$$\hat{H} |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle \quad (2.8)$$

بينما هذه الحالة $|E_n\rangle$ اذا ما أثبتنا عليها بالمسلة $(\hat{a} \hat{a}^+)$ تؤدي الى :

$$\begin{aligned}
 \hat{a} \hat{a}^+ |E_n\rangle &= (\hat{H} + \frac{1}{2} \hbar \omega) |E_n\rangle \\
 &= \hat{H} |E_n\rangle + \frac{1}{2} \hbar \omega |E_n\rangle \\
 &= (E_n + \frac{1}{2} \hbar \omega) |E_n\rangle
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

بالمثل

$$\hat{a}^+ \hat{a} |E_n\rangle = (E_n - \frac{1}{2} \hbar \omega) |E_n\rangle \tag{2.10}$$

ونضرب (2.11) بالمعادلة (2.11) :

$$\hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ |E_n\rangle = (E_n + \frac{1}{2} \hbar \omega) \hat{a}^+ |E_n\rangle \tag{2.11}$$

$$\therefore \hat{a}^+ \hat{a} \{ \hat{a}^+ |E_n\rangle \} = (E_n + \frac{1}{2} \hbar \omega) \{ \hat{a}^+ |E_n\rangle \} \tag{2.12}$$

ومقارنة (2.12) بالمعادلة (2.9) نلاحظ أن :

$$\hat{a}^+ |E_n\rangle = 0 \tag{2.13}$$

أو أن :

$$\hat{a}^+ |E_n\rangle = |E_{n+1}\rangle \tag{2.14}$$

وعليه تصبح العلاقة (2.12) :

$$\hat{a}^+ \hat{a} |E_{n+1}\rangle = [(E_n + \hbar \omega) - \frac{1}{2} \hbar \omega] |E_{n+1}\rangle \tag{2.15}$$

وهي نفس المعادلة : $\hat{a}^+ \hat{a} |E_n\rangle = (E_n - \frac{1}{2} \hbar \omega) |E_n\rangle$ على اعتبار

$$E_{n+1} = E_n + \hbar \omega \tag{2.16}$$

ومعنى ذلك انه اذا أعطينا ان متجه ايجينى (حالة ايجينية) $|E_n\rangle$ فمن الممكن توليد متجه ايجينى جديد $|E_{n+1}\rangle$ عن طريق :

$$\hat{a}^+ |E_n\rangle = |E_{n+1}\rangle$$

حيث الحالة الايجينية $|E_{n+1}\rangle$ تنسب للقيمة الايجينية :

$$E_{n+1} = E_n + \hbar\omega \quad (2.16)$$

الآ اذا حدث ان كان E_n هو أعلى مستوى للطاقة • وفي هذه الحالة فـان المعادلة التالية تتحقق :

$$\hat{a}^+ |E_n\rangle = 0 \quad (2.13)$$

ولكن يلاحظ أن شكل الجهد للمتذبذب التوافقي الهارمونى لا يتصف بعد أقصى لمستويات الطاقة إذ أن عملية توليد مستوى طاقة عما تم الوصول اليه دائلا ممكنة •

بنفس الاسلوب يضرب (2.10) فى المعادلة \hat{a} نحصل على :

$$\hat{a}\hat{a}^+\hat{a} |E_n\rangle = (E_n - \frac{1}{2}\hbar\omega) \hat{a} |E_n\rangle \quad (2.17)$$

وهذا بالتالى يؤدي الى اما ان :

$$\hat{a} |E_n\rangle = 0 \quad (2.18)$$

أو

$$\hat{a} |E_n\rangle = |E_{n-1}\rangle \quad (2.19)$$

وهذه النتيجة معناها المكانية إعادة كتابة معادلة (2.17) بالصورة :

$$\hat{a}\hat{a}^+ |E_{n-1}\rangle = [(E_n - \hbar\omega) + \frac{1}{2}\hbar\omega] |E_{n-1}\rangle \quad (2.19)$$

وهي معادلة (2.9) للحالة E_{n-1} على اعتبار أن الطاقة E_{n-1} تساوى $(E_n - \hbar\omega)$ وهذا معناه ان اذا بدأنا بأى حالة كمية ايجينية $|E_n\rangle$ فمن

الممكن توليد حالة ايجينية جديدة $\left| E_{n-1} \right\rangle$ عن طريق :

$$\hat{a} \left| E_n \right\rangle = \left| E_{n-1} \right\rangle \quad (2.19)$$

الا اذا كانت الحالة $\left| E_n \right\rangle$ تنال الحالة الارضية "Ground State" $\left| E_0 \right\rangle$ وحينئذ يتحقق الشرط التالي :

$$\hat{a} \left| E_n \right\rangle = 0 \quad (2.18)$$

وعليه فاننا نجد من العلاقة (2.10) ان العدد الكلى n يماوى صفراً -

$$(E_0 - \frac{1}{2} \hbar \omega) = 0$$

فى نفس الوقت فان معادلة (2.16) توضح ان :

$$E_1 = E_{0+1} = E_0 + \hbar \omega = \frac{1}{2} \hbar \omega + \hbar \omega = \frac{3}{2} \hbar \omega \quad (2.20)$$

$$E_2 = E_{1+1} = E_1 + \hbar \omega = \frac{5}{2} \hbar \omega \quad (2.21)$$

أى ان طاقة اى مستوى عموما تعطى بالعلاقة :

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad (2.22)$$

حيث n يماوى 0 و 1 و 2 و الخ .

ونلاحظ ما سبق ان العاملة \hat{a} تؤدي الى ثلاثى الطاقة بكمات متتابعة

فى كل مرة يكون الكم الثلاثى مقداره $(\hbar \omega)$ ولذلك تسمى العاملة \hat{a} بعملية

"هدم" Annihilation او عامله خفض Lowering . بينما العاملة \hat{a}^+

تؤدي الى زيادة الطاقة بكمات متتابعة فى كل مرة يكون الكم المتولد مقداره $(\hbar \omega)$

ولذلك تسمى العاملة \hat{a}^+ بعملية "توليد" Creation Operator أو عامله

رفع Raising Operator .

بعدما درسنا كيفية استنتاج القيم الايجينية لمستويات الطاقة الخاصة بالتذبذب

التوافقى البسيط (معادلة (2.22)) نحاول الآن دراسة كيفية استنتاج السدوال

الخاصة بالتذبذب التوافقي • وتبسيط المعالجة الرياضية نكتب بعض المعادلات التي سبق لنا التعرض لها بالأسلوب التالي :

$$\hat{H} |E_n\rangle = E_n |E_n\rangle \Rightarrow \hat{H} |n\rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega |n\rangle \quad (2.8')$$

حيث مقترنين أن تلك الدوال تتصف بخاصيتي المعايرة والمعادية (راجع معادلة :

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn} \quad (1.)$$

وكذلك لدينا :

$$\hat{H} \{ \hat{a} |n\rangle \} = (n - \frac{1}{2}) \hbar \omega \{ |n\rangle \} \quad (2.23)$$

أي أن $\{ |n\rangle \}$ كتايجيني ينتمي للتبة الايجينية $(n - \frac{1}{2}) \cdot \hbar \omega$ وهذا معناه ان الكت $|n\rangle$ حاصل ضرب عددا b_n (ولكن b_n في الكست $n-1$ أي أن :

$$\hat{a} |n\rangle = b_n |n-1\rangle \quad (2.24)$$

ولكى يتم تعيين b_n نحسب مربع طول المتجه $\hat{a} |n\rangle$ أى نحسب :

$$\langle n | \hat{a}^+ \hat{a} |n\rangle = \langle n-1 | b_n^2 |n-1\rangle = b_n^2 \langle n-1 | n-1\rangle = b_n^2 \quad (2.25)$$

ولكى نحسب الطرف الأيسر من (2.25) نستفيد من العلاقة $(\hat{a}^+ \hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2} \cdot \hbar \omega)$ راجع معادلة (2.10) - كما يلي :

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} |n\rangle &= \langle n | (\hat{H} - \frac{1}{2} \cdot \hbar \omega) |n\rangle = \langle n | \left\{ (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega - \frac{1}{2} \cdot \hbar \omega \right\} |n\rangle \\ &= n \hbar \omega \langle n | n \rangle = n \hbar \omega \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\therefore b_n^2 = n \hbar \omega \quad (2.27)$$

$$\therefore \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n \hbar \omega} |n-1\rangle \quad (2.28)$$

وبالمثل :

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \{\sqrt{n+1} |n+1\rangle\} \sqrt{\hbar\omega} \quad (2.29)$$

وبذلك على سبيل المثال :

$$\hat{a}^+ |0\rangle = \sqrt{0+1} \{\hbar\omega\}^{1/2} |0+1\rangle = \sqrt{1} |1\rangle \{\hbar\omega\}^{1/2}$$

$$\therefore |1\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{\hbar\omega}} |0\rangle \quad (2.30)$$

$$\hat{a}^+ |1\rangle = \sqrt{2 \hbar\omega} |2\rangle$$

$$\therefore |2\rangle = \frac{\hat{a}^+}{\sqrt{2 \hbar\omega}} |1\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^2}{\sqrt{2!}} |0\rangle \left\{ \frac{1}{\hbar\omega} \right\} \quad (2.31)$$

وعموماً :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \left\{ \frac{1}{\hbar\omega} \right\}^{n/2} \quad (2.32)$$

وتوضح لنا معادلة (2.29) سبب تسمية الحالة \hat{a}^+ "حالة بناء" بمعنى ان الكمية $|n\rangle$ يمثل حالة "مضطربة" للتذبذب التوافقي تحتوي على عدد n من كمات الطاقة كل منها $\hbar\omega$ بجانب طاقة نقطة الصفر $\frac{1}{2} \hbar\omega$ ونتيجة تأثير \hat{a}^+ على هذا السطح $|n\rangle$ يتولد كم طاقة $\hbar\omega$ زيادة عما هو موجود $(n \cdot \hbar\omega)$.

ولنفرض الآن أن التذبذب التوافقي في حالة كمية تقابل تواجد هذا الجسم عند نقطة احداثي الوضع لها x وعلى ذلك تكون الدالة الموجية هي $\langle x | n \rangle$ - راجع معادلة (1.5) . وما ان الحالة الاضية $|0\rangle$ تتميز بالعلاقة :

$$\hat{a} |E_0\rangle = \hat{a} |0\rangle = 0 \quad (2.18')$$

فانه بضرب تلك المعادلة من جهة اليسار في متجه البرا $(\langle x |)$:

$$\therefore \langle x | a | 0 \rangle = 0$$

$$\therefore \langle x | \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x + i \frac{p}{\sqrt{2m}} \right\} | 0 \rangle = 0$$

$$\therefore \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \right\} \langle x | 0 \rangle = 0$$

$$\therefore -\sqrt{\frac{m}{2}} \omega x dx = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d \langle x | 0 \rangle}{\langle x | 0 \rangle}$$

$$\therefore \langle x | 0 \rangle = \text{constant (C)} e^{-\frac{m \omega x^2}{2 \hbar}} \quad (2.33)$$

ويمكننا الحصول على ما يماثيه الثابت C في معادلة (2.33) بأن نستخدم مسن
الملاءة :

$$\langle 0 | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | 0 \rangle dx = 1 \quad (2.34)$$

$$\therefore C = \left[\frac{m \omega}{\pi \hbar} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (2.35)$$

وباستخدام العلاقة :

$$\begin{aligned} \langle x | 1 \rangle &= \langle x | a^+ | 0 \rangle = \langle x | \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x - i \frac{p}{\sqrt{2m}} \right\} | 0 \rangle \\ &= \left\{ \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \right\} \langle x | 0 \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} x \left(\frac{m \omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m \omega x^2}{2 \hbar}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

ونفس الاسلوب يمكننا استنتاج المعادلة العامة لأي دالة خاصة بالحالات الخطيرة
: (excited)

$$\langle x | n \rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (2.37)$$

• Hermite Polynomials متعددة الحدود لهيرميت $H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)$ حيث

مثال (٢ - ١) :

في مسألة التذبذب التوافقي البسيط عرّف عن المعاملات \hat{x} والمعاملات \hat{p}
بدلالة عاملتي خفض ورفع مستويات الطاقة للتذبذب \hat{a} \hat{a}^+ $\hat{a} = \hat{a}^+$ \hat{a}^+ \hat{a}
واحسب عناصر الصفوة التي تقابل كل منهما • وضح ما تكون عليه كل من هاتين
الصفوتين •

الحل :

نعلم أن :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m}{2}} \omega \hat{x} + i \frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} \quad (2.2)$$

$$\hat{a}^+ = \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x - i \frac{p}{\sqrt{2m}} \quad (2.3)$$

وأن :

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n \hbar \omega} |n-1\rangle \quad (2.28)$$

$$\hat{a}^+ |n\rangle = \sqrt{(n+1) \hbar \omega} |n+1\rangle \quad (2.29)$$

وعلى ذلك فإن أى عنصر فى الصفوة التى تمثل الحالة \hat{a} تأخذ الصورة :

$$\begin{aligned}\langle m | \hat{a} | n \rangle &= \langle m | \sqrt{n \hbar \omega} | n-1 \rangle \\ &= \sqrt{n \hbar \omega} \langle m | n-1 \rangle \\ &= \sqrt{n \hbar \omega} \delta_{m,n-1}\end{aligned}\quad (2.38)$$

وبالمثل فإن أى عنصر فى الصفوة التى تمثل الحالة \hat{a}^+ تأخذ الصورة :

$$\langle m | \hat{a}^+ | n \rangle = \sqrt{(n+1) \hbar \omega} \delta_{m,n+1} \quad (2.39)$$

وحيث أن :

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2 m \omega^2}} (\hat{a}^+ + \hat{a}) , \quad \hat{p} = i \sqrt{\frac{m}{2}} (\hat{a}^+ - \hat{a})$$

إذاً عنصر الصفوة التى تمثل الحالة \hat{x} :

$$\begin{aligned}\langle m | \hat{x} | n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2 m \omega^2}} \left\{ \langle m | \hat{a}^+ | n \rangle + \langle m | \hat{a} | n \rangle \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2 m}} \left\{ \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1} \right\}\end{aligned}\quad (2.40)$$

وعنصر الصفوة التى تمثل الحالة \hat{p} :

$$\begin{aligned}\langle m | \hat{p} | n \rangle &= i \sqrt{\frac{m}{2}} \left[\langle m | \hat{a}^+ | n \rangle - \langle m | \hat{a} | n \rangle \right] \\ &= i \sqrt{\frac{m \hbar \omega}{2}} \left\{ \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} - \sqrt{n} \delta_{m,n-1} \right\}\end{aligned}\quad (2.41)$$

وعلى ذلك فان مصفوفة \hat{x} تأخذ الصورة :

$$\{\hat{x}\} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ومصفوفة \hat{p} :

$$\{\hat{p}\} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

الباب الثالث

معالجة كمية التحرك الزاوى بدلالة ديراك

فى هذا الباب نود دراسة خصائص تتميز بها كمالات كمية التحرك الزاوى لانستطيع استنتاجها إلا فى اطار دلالة ديراك .

نبدأ هنا ببعض العلاقات الخاصة بكمية التحرك الزاوى وتتلخص فيما يلى وسيسبق لنا ذكرها بعض من التفصيل فى " الجزء الاول " . وهذه العلاقات هى (حيث \hat{J}_x و \hat{J}_y و \hat{J}_z هى الكمالات التى تمثل مركبات كمية التحرك الزاوى \hat{J}) :

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i \hbar \hat{J}_z \quad (3.1)$$

$$[\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i \hbar \hat{J}_x \quad (3.2)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i \hbar \hat{J}_y \quad (3.3)$$

$$[\hat{J}_x, \hat{J}^2] = 0 \quad (3.4)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{H}] = 0 \quad (3.5)$$

$$[\hat{J}^2, \hat{H}] = 0 \quad (3.6)$$

وكون ان كلا من \hat{J}_z و \hat{J}^2 تتبادل مع المعاملة الهاميلتونية \hat{H} (معادلتنى (3.5) و (3.6)) فهذا يعنى امكانية الحصول على دوال ايجينية فى نفس الوقت تنسب للقيم الايجينية لهما وتحقق العلاقتين التاليتين :

$$\hat{J}_z \left| \beta, m \right\rangle = \hbar m \left| \beta, m \right\rangle \quad (3.7)$$

$$6 \quad \hat{J}^2 \left| \beta, m \right\rangle = \hbar^2 \beta \left| \beta, m \right\rangle \quad (3.8)$$

بمعنى ان العاملين \hat{J}_z (التى تقابل المركة العينية لكمية التحرك المزاوى) ،
 \hat{J}^2 عندما أثرتا على متجه الكت $\left| \beta, m \right\rangle$ نتجت الدالة الايجينية $\left| \beta, m \right\rangle$
 التى تتوى فى نفس الوقت لكل من القيمة الايجينية $\hbar^2 \beta$ لمربع كمية التحرك
 المزاوى \hat{J}^2 والقيمة الايجينية $\hbar m$ للمركة العينية \hat{J}_z .

ومن المناسب هنا التعريف بعاملتين جديدتين \hat{J}_+ و \hat{J}_- مسسوف
 تساعدانا فى الحصول على القيم الايجينية والدوال الايجينية لكل من كمية التحرك المزاوى
 \hat{J} ومركباتها الثلاث \hat{J}_x و \hat{J}_y و \hat{J}_z . حيث :

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i \hat{J}_y \quad (3.9)$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_x - i \hat{J}_y \quad (3.10)$$

والان نود ان نستنتج بعض العلاقات الخاصة بهاتين العاملتين وتتلخص فيما يلى :

$$\begin{aligned} [\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= \hat{J}_z \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_z \\ &= \hat{J}_z (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) - (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) \hat{J}_z \\ &= \hat{J}_z \hat{J}_x + i \hat{J}_z \hat{J}_y - \hat{J}_x \hat{J}_z - i \hat{J}_y \hat{J}_z \\ &= (\hat{J}_z \hat{J}_x - \hat{J}_x \hat{J}_z) - i (\hat{J}_y \hat{J}_z - \hat{J}_z \hat{J}_y) \\ &= [\hat{J}_z, \hat{J}_x] - i [\hat{J}_y, \hat{J}_z] \\ &= i \hbar \hat{J}_y - i (i \hbar \hat{J}_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{J}_z, \hat{J}_+ &= i \hbar \hat{J}_y + \hbar \hat{J}_x \\ &= \hbar (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) = \hbar \hat{J}_+\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{J}_z \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_z = \hbar \hat{J}_+$$

$$\therefore \hat{J}_z \hat{J}_+ = \hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+ \quad (3.11)$$

وبالمثل :

$$\hat{J}_z \hat{J}_- = \hat{J}_- \hat{J}_z - \hbar \hat{J}_- \quad (3.12)$$

فلذا ما أثبتنا بالمعادلة $(\hat{J}_z \hat{J}_+)$ على الدالة $|\beta, m\rangle$ نجد ان :

$$\begin{aligned}\hat{J}_z \hat{J}_+ |\beta, m\rangle &= (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+) |\beta, m\rangle \\ &= \hat{J}_+ \hat{J}_z |\beta, m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \\ &= \hat{J}_+ \hbar m |\beta, m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \\ &= \hbar m \hat{J}_+ |\beta, m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \\ &= (\hbar m + \hbar) \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \\ &= \hbar (m + 1) \hat{J}_+ |\beta, m\rangle\end{aligned}$$

$$\therefore \hat{J}_z \{ \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \} = \hbar (m + 1) \{ \hat{J}_+ |\beta, m\rangle \} \quad (3.13)$$

وبمقارنة هذه النتيجة بمعادلة (3.7) نلاحظ تعاض وهذا معناه ضرورة أن :

$$\hat{J}_+ |\beta, m\rangle = 0 \quad (3.14)$$

$$\hat{J}_+ \left| \beta, m \right\rangle = \left| \beta, m+1 \right\rangle \quad (3.15) \quad \text{أو أن :}$$

وعلى هذا تصبح معادلة (3.13) بالصورة التالية :

$$\hat{J}_z \left| \beta, m+1 \right\rangle = \hbar (m+1) \left| \beta, m+1 \right\rangle \quad (3.16)$$

دون أى تعارض من أى وجه . وعلى هذا يمكننا فهم معنى معادلة (3.15) على أنه إذا بدأنا بدالة ايجينية $\left| \beta, m \right\rangle$ خاصة بالقيم الايجينية $m \hbar$ للعاملية \hat{J}_z ، $\hbar^2 \beta$ للعاملية \hat{J}^2 وأثرنا بالعاملية \hat{J}_+ على هذه الدالة يمكننا توليد دالة ايجينية $\left| \beta, m+1 \right\rangle$ تنبع للقيمة الايجينية $(m+1) \hbar$ للعاملية \hat{J}_z . وهذه العملية يمكن ان تستمر على هذا النحو الى ان تصل m الى القيمة القصوى m_{\max} التى لا يمكن تعديها والتى تقابل حينئذ ما نسميه معادلة (3.14) على النحو التالى :

$$\hat{J}_+ \left| \beta, m_{\max} \right\rangle = 0 \quad (3.14')$$

وعلى نفس النمط اذا سَخْنَا للعاملية $\hat{J}_z \hat{J}_-$ ان تؤثر على الدالة $\left| \beta, m \right\rangle$ نجد أن :

$$\begin{aligned} \hat{J}_z \hat{J}_- \left| \beta, m \right\rangle &= (\hat{J}_- \hat{J}_z - \hbar \hat{J}_-) \left| \beta, m \right\rangle \\ &= \hbar (m-1) \hat{J}_- \left| \beta, m \right\rangle \end{aligned}$$

أى أن :

$$\hat{J}_z \left\{ \hat{J}_- \left| \beta, m \right\rangle \right\} = \hbar (m-1) \left\{ \hat{J}_- \left| \beta, m \right\rangle \right\} \quad (3.17)$$

مرة اخرى نلاحظ تعارضا بين هذه النتيجة ومعادلة (3.7) . وهذا معناه ضرورة أن :

$$\hat{J}_- \left| \beta, m \right\rangle = 0 \quad (3.18)$$

أو أن

$$\hat{J}_- |\beta, m\rangle = |\beta, m-1\rangle \quad (3.19)$$

وعلى ذلك تصبح معادلة (3.17) بالصورة التالية :

$$\hat{J}_z |\beta, m-1\rangle = \hbar (m-1) |\beta, m-1\rangle \quad (3.20)$$

وبهذا يتلشى أى تعارض من أى وجه ومثلما رأينا فيما يختص بمعادلة (3.16) يمكننا تفسير معادلة (3.19) على أنه إذا بدأنا بدالة إيجينية $|\beta, m\rangle$ خاصة بالقيمة الإيجينية $m\hbar$ للعامة \hat{J}_z ، $\hbar^2 \beta$ للعامة \hat{J}^2 وأنزلنا بالعامة \hat{J}_- على هذه الدالة يمكننا توليد دالة إيجينية جديدة $|\beta, m-1\rangle$ تنبع نفس القيمة الإيجينية $\hbar^2 \beta$ للعامة \hat{J}^2 بينما تنبع قيمة إيجينية أقل $\hbar (m-1)$ للعامة \hat{J}_z . وهذه العملية يمكن هى الأخرى أن تستمر إلى أن نصل m إلى اصفريته لها m_{\min} وحينئذ يتحقق الشرط الموضح بمعادلة (3.18) على النحو التالى :

$$\hat{J}_- |\beta, m_{\min}\rangle = 0 \quad (3.18')$$

مع ملاحظة أن معادلتى (3.18) و (3.20) توضح أن القيم المسموح بها للعدد m تختلف عن بعضها بإعداد صحيحة فقط .

ولنتنقل الآن إلى العامة " $\hat{J}_- \hat{J}_+$ " :

$$\begin{aligned} \hat{J}_- \hat{J}_+ &= (\hat{J}_x - i \hat{J}_y) (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) \\ &= \hat{J}_x^2 + i \hat{J}_x \hat{J}_y - i \hat{J}_y \hat{J}_x - i^2 \hat{J}_y^2 \\ &= (\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2) + i (\hat{J}_x \hat{J}_y - \hat{J}_y \hat{J}_x) \\ &= (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2) + i (i \hbar \hat{J}_z) \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z \quad (3.21)$$

وبالسماح لهذه المعادلة بأن تؤثر على الدالة $|\beta, m_{\max}\rangle$ نجد أن :

$$\begin{aligned} \hat{J}_- \hat{J}_+ |\beta, m_{\max}\rangle &= (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) |\beta, m_{\max}\rangle \\ &= (\beta \hbar^2 - m_{\max}^2 \hbar^2 - \hbar^2 m_{\max}) |\beta, m_{\max}\rangle \\ &= \hbar^2 (\beta - m_{\max}^2 - m_{\max}) |\beta, m_{\max}\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore 0 = \hbar^2 (\beta - m_{\max}^2 - m_{\max}) |\beta, m_{\max}\rangle$$

$$\therefore \beta - m_{\max} (m_{\max} + 1) = 0 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \hat{J}_- &= (\hat{J}_x + i \hat{J}_y) (\hat{J}_x - i \hat{J}_y) \quad \text{وبالمثل} \\ &= \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z \quad (3.23) \end{aligned}$$

وبالسماح لهذه المعادلة بأن تؤثر على الدالة $|\beta, m_{\min}\rangle$ نجد أن :

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \hat{J}_- |\beta, m_{\min}\rangle &= (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) |\beta, m_{\min}\rangle \\ &= (\beta \hbar^2 - m_{\min}^2 \hbar^2 - m_{\min} \hbar^2) |\beta, m_{\min}\rangle \end{aligned}$$

$$\therefore 0 = \hbar^2 (\beta - m_{\min}^2 + m_{\min}) |\beta, m_{\min}\rangle$$

$$\therefore \beta - m_{\min} (m_{\min} - 1) = 0 \quad (3.24)$$

وعلى ذلك من معادلتى (3.22) و (3.24) نحصل على :

$$m_{\max} (m_{\max} + 1) = m_{\min} (m_{\min} - 1)$$

$$\therefore m_{\max}^2 + m_{\max} - m_{\min}^2 + m_{\min} = 0$$

$$\therefore (m_{\max}^2 - m_{\min}^2) + (m_{\max} + m_{\min}) = 0$$

$$\therefore (m_{\max} + m_{\min}) [m_{\max} - m_{\min} + 1] = 0$$

$$\therefore m_{\max} = -m_{\min} \quad (3.25)$$

وهذه المعادلة تعنى اننا لو رمزنا لكل من $|m_{\min}|$ و $|m_{\max}|$ بالرمز المشترك j اى ان :

$$|m_{\max}| = |m_{\min}| = j \quad (3.26)$$

فان القيم الممكنة للعدد الكلى m تتغير بخطوات عددية صحيحة ليس بها كسور من $-j$ الى $+j$ مع التنازل نحو "نقطة الأصل" • وبما ان قيم m_{\max} و m_{\min} تختلف عن بعضهما باعداد صحيحة فان :

$$m_{\max} - m_{\min} = 2j \quad (3.27)$$

$$\therefore j = \frac{m_{\max} - m_{\min}}{2} \quad (3.28)$$

ومن معادلة (3.28) نلاحظ أن :

•	$m_{\max} - m_{\min} = 0$	عندما تكون	$j = 0$
•	$m_{\max} - m_{\min} = 1$	عندما تكون	$j = \frac{1}{2}$
•	$m_{\max} - m_{\min} = 2$	عندما تكون	$j = 1$
الخ	$m_{\max} - m_{\min} = 3$	عندما تكون	$j = \frac{3}{2}$

أي أن قيم j تكون على النحو التالي :

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, \dots, \quad (3.29)$$

ونود أن نشير هنا إلى أن هذه النتيجة الهامة الخاصة بالقيم الايجينية لعامة كوسية التحرك الزاوى \hat{J} امكن التوصل اليها باستخدام علاقات التبادل للمعاملة \hat{J} ومركباتها \hat{J}_x و \hat{J}_y و \hat{J}_z . ولم يكن من الممكن التوصل اليها باستخدام معادلة شرودنجر إلا في اطار دالة ديراك .

وبعدما درسنا كيفية الوصول الى تلك النتيجة الهامة في ميكانيكا الكم تنتقل الى دراسة الصفوفات التي تمثل مركبات كمية التحرك الزاوى .

صفوفات \hat{J} :

نلاحظ من معادلتى (3.24) و (3.26) ان :

$$\beta = j(j+1) \quad (3.30)$$

وعلى ذلك نعيدل معادلات (3.7) و (3.8) و (3.15) و (3.19) بالمعادلات التالية :

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \quad (3.31)$$

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \quad (3.32)$$

$$\hat{J}_+ |\beta, m\rangle = |\beta, m+1\rangle \quad (3.33)$$

$$\hat{J}_- |\beta, m\rangle = |\beta, m-1\rangle \quad (3.34)$$

والان اذا ادخلنا معامل معايرة (Normalization Factor) N_+ وليكن N_- في معادلة (3.33) والمقابل لهذا N_- في معادلة (3.34) مع التعويض مرة اخرى عن $\hat{J}_+ + \hat{J}_-$ بدلالة المركبتين \hat{J}_x و \hat{J}_y نجد ان :

$$(\hat{J}_x + i \hat{J}_y) |j, m\rangle = N_+ |j, m+1\rangle \quad (3.35)$$

$$(\hat{J}_x - i \hat{J}_y) |j, m+1\rangle = N_- |j, m\rangle \quad (3.35')$$

ويمكننا اختيار شرط مساواة المعاملين N_+ و N_- حيث لا يوجد اى تعارض على أساس فيزيائى لهذا الاختيار . وعلى ذلك نستطيع كتابة :

$$N_+ = N_- = N \quad (3.36)$$

(ومع ملاحظة ان هذه متصلة بمعامل النقل الاحصائى (Weighting Factor) N فى عملية حساب كثافة الحالات الكمية فهذا يعنى ان N يجب ان تكون حقيقية) . والان لتجعل المعادلة \hat{J}_- (Lowering Operator) تؤثر على $|j, m\rangle$ نؤثر على $(\hat{J}_x + i \hat{J}_y) |j, m\rangle$ في معادلة (3.35) نجد ان :

$$\begin{aligned}
 (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) |j, m\rangle &= (\hat{J}_x - i\hat{J}_y) \hbar |j, m+1\rangle \\
 &= \hbar (\hat{J}_x - i\hat{J}_y) |j, m+1\rangle \\
 &= \hbar \hbar |j, m\rangle = \hbar^2 |j, m\rangle \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

وباجراء الضرب القياسي لهذه المعادلة مع الدالة المرافقة (متجه اليمين) نجد ان :

$$\langle j, m | (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) | j, m \rangle = \langle j, m | \hbar^2 | j, m \rangle = \hbar^2 \quad (3.38)$$

حيث ان :

$$(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \hbar^2 &= \langle j, m | \{ \hat{J}^2 | j, m \rangle - \hat{J}_z^2 | j, m \rangle - \hbar \hat{J}_z | j, m \rangle \} \\
 &= \langle j, m | \{ \hbar^2 j(j+1) | j, m \rangle - \hbar^2 m^2 | j, m \rangle - \hbar^2 m | j, m \rangle \} \\
 &= \langle j, m | \hbar^2 j(j+1) | j, m \rangle - \langle j, m | \hbar^2 m^2 | j, m \rangle - \langle j, m | \hbar^2 m | j, m \rangle \\
 &= \hbar^2 \{ j(j+1) - m^2 - m \} \cdot \langle j, m | j, m \rangle = \hbar^2 \{ j(j+1) - m(m+1) \} \cdot 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore \hbar = \pm \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$$

مرة اخرى على اساس غيضاى نستطيع ان نختار العلامة الموجبة :

$$\hbar = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \quad (3.39)$$

وبادخال هذه النتيجة في معادلة (3.35) نحصل على :

$$(\hat{J}_x + i\hat{J}_y)|j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \quad (3.40)$$

بينما معادلة (3.35') تعطينا :

$$(\hat{J}_x - i\hat{J}_y)|j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - (m-1)m} |j, m-1\rangle \quad (3.40')$$

حيث كتبنا m بدلاً من $(m+1)$ و $(m-1)$ بدلاً من m وجميع معادلتى (3.40) و (3.40') :

$$\begin{aligned} \hat{J}_x |j, m\rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle \\ &+ \frac{\hbar}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle \end{aligned} \quad (3.41)$$

وباجراء الضرب القياسى لمعادلة (3.41) مع متجه البرا $\langle j', m' |$ نحصل على الصيغة التى تمثل المعادلة \hat{J}_x :

$$\begin{aligned} \langle j', m' | \hat{J}_x |j, m\rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{j', j} \delta_{m', m+1} \\ &+ \frac{\hbar}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{j', j} \delta_{m', m-1} \end{aligned} \quad (3.42)$$

وبالمثل اذا طرحنا (3.40') من (3.40) واجراء الضرب القياسى للمعادلة الناتجة مع متجه البرا $\langle j', m' |$ نحصل على الصيغة التى تمثل المعادلة \hat{J}_y :

$$\begin{aligned} \langle j', m' | \hat{J}_y |j, m\rangle &= -\frac{i\hbar}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{j', j} \delta_{m', m+1} \\ &+ \frac{i\hbar}{2} \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{j', j} \delta_{m', m-1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

واللحصول على الصفوة التى تثل العاملة \hat{J}_z نستخدم مباشرة معادلة (3.31) حيث يتم الضرب القياس لها بمتجه البرا $|j', m'\rangle$:

$$\langle j', m' | \hat{J}_z | j, m \rangle = \hbar m \delta_{j', j} \delta_{m', m} \quad (3.44)$$

وأخيرا للحصول على الصفوة التى تثل J^2 نستخدم معادلة (3.32) :

$$\langle j', m' | J^2 | j, m \rangle = \hbar^2 j(j+1) \delta_{j', j} \delta_{m', m} \quad (3.45)$$

وبذلك نكون قد درسنا كيفية الحصول على الصفوات التى تثل J^2 والركبات \hat{J}_x و \hat{J}_y و \hat{J}_z .

ونود ان نغير هنا الى ان معادلتى (3.44) و (3.45) توضحان ان كلا من الصفوة التى تثل \hat{J}_z والصفوة التى تثل J^2 عبارة عن صفوة محورية اذ ان عناصرها تكون مساوية للصفر الا اذا كان دلالات تلك العناصر m و m' متساوية . اما كل من الصفوتين اللتين تثلان \hat{J}_x و \hat{J}_y فعناصرها تساوى صفرا الا اذا كان دلالات المنصر m و m' تختلف فيما بينها بمقدار الوحدة .

مثال (١-٣) :

استنتج تراكيب الصفوات التى تثل \hat{J}_x و \hat{J}_y و \hat{J}_z فى حالة \hat{J} تساوى 0 ، $\frac{1}{2}$ ، 1 .

الحل :

بالنسبة لحالة \hat{J} تساوى صفرا (مثل جسيم الفا (وهو نواة ذرة الهيليوم)) فجميع الصفوات كل منها يساوى صفرا .

أما في حالة \hat{J} يساوى $\frac{1}{2}$ فان القيم الممكنة للعدد m هي $\pm \frac{1}{2}$.
 ومعنى ذلك ان الدوال القاعدية هي $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ و $\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$
 وبذلك تكون الصفوفات السنية عليها تتصف بترتيب $(2 \times \frac{1}{2} + 1)$ كعدد صفوف
 افقية $(2 \times \frac{1}{2} + 1)$ كعدد صفوف رأسية . ثم نبدأ بكتابة دلالات عناصرها
 بواسطة العدد m بقيم $\frac{1}{2}$ ثم $-\frac{1}{2}$ من اليسار لليمين . كذلك $\frac{1}{2}$
 ثم $-\frac{1}{2}$ من الصف العلوى الى الذى اسفله كما يلى :

$$\begin{pmatrix} \left(\right)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} & \left(\right)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \\ \left(\right)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} & \left(\right)_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

وقيم تلك العناصر يمكننا الحصول عليها كما يلى :

—العنصر $(\hat{J}_x)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ معناه :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \hat{J}_x \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+1} \\ &+ \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-1} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

—العنصر $(\hat{J}_x)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ معناه :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \hat{J}_x \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+1)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{\frac{1}{2}, (-\frac{1}{2}+1)} \\ &+ \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{\frac{1}{2}, (-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{\hbar}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot 1 \times 1 + 0 = \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

- العنصر $(J_x)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ معناه :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| \hat{J}_x \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{-\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}+1\right)} \\ &+ \frac{\hbar}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{-\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}-1\right)} \\ &= 0 + \frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

- العنصر $(J_x)_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ ما درسته واضح انه يساوى صفرا .

وعلى ذلك فالمصفوفة التى تقابل \hat{J}_x :

$$\therefore \left\{ \hat{J}_x \right\} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

والان بالنسبة للمركبة \hat{J}_y فان :

- العنصر $(J_y)_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ معناه :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \hat{J}_y \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= -\frac{i\hbar}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}+1\right)} \\ &+ \frac{i\hbar}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)} \delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \delta_{\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}-1\right)} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

ونفس الأسلوب نجد ان $(\hat{J}_y)_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ يعاوى $-\frac{1}{2}\hbar$ ، $(\hat{J}_y)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ يعاوى $\frac{1}{2}\hbar$ بينما $(\hat{J}_y)_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$ يعاوى صفراً .
وعلى ذلك تكون المصفوفة \hat{J}_y عبارة عن :

$$\left\{ \hat{J}_y \right\} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

وأخيراً فالمصفوفة \hat{J}_z هي :

$$\left\{ \hat{J}_z \right\} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وأخيراً بالنسبة لحافة \hat{J} تساوى الوحدة فالتناهداً يكتبها دلالات خاصوها
(نفس الأسلوب الذى اوضحناه) كما يلى بالنسبة لكل من المركبات \hat{J}_x و \hat{J}_y و \hat{J}_z
مع ملاحظة ان القيم الممكنة للمعد m هي $+1$ ، 0 ، -1 وعلى
ذلك فالمصفوفة نرملها كما يلى :

$$\begin{pmatrix} ()_{1,1} & ()_{1,0} & ()_{1,-1} \\ ()_{0,1} & ()_{0,0} & ()_{0,-1} \\ ()_{-1,1} & ()_{-1,0} & ()_{-1,-1} \end{pmatrix}$$

ونفس الأسلوب الذي اتبعناه مع \hat{J}_x نحاول $\frac{1}{2}$ نجد ان في حالة \hat{J}_z
= الوحدة :

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

الباب الرابع

نظرية ديراك الخاصة بالمعالجة الكمية لجسيم الالكترون

في اطار النظرية النسبية

(DIRAC RELATIVISTIC QUANTUM THEORY OF THE ELECTRON)

نود في هذا الباب تبسيط نظرية ديراك لجسيم الالكترون وتوضيح ان الحركة
المغزلية الداخلية (Internal Spin) للالكترون (كنال لباقي الجسيمات
الاولية (Elementary Particles) هي نتيجة طبيعية للنظرية النسبية الخاصة
التي قدمها اينشتين *

نبحا للنظرية النسبية الخاصة نعلم ان لأي جسيم كتلة الماكئة m وكمية
تحرك الخطى p وطاقته الكلية E فان :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4.1)$$

فاذا كان هذا الجسيم عبارة عن الكترون متواجد في مجال كهروستاتيكي يجب ان نعتدل
بالكمية E بالكمية $(E - V)$ حيث V طاقة الوضع الناتجة عن المجال الكهربائي
سوف نهمل اى تأثيرات كهرومغناطيسية نتيجة حركة جسيم الالكترون داخل المجال
الكهربي :

$$\therefore (E - V)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \therefore E &= V \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= V \pm \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m^2 c^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

وإذا استبدلنا الطاقة الكلية E بالعامة الهاميلتونية \hat{H} ومركبات كمية الحركة الخطية \hat{p}_x و \hat{p}_y و \hat{p}_z بما يقابلها من عاملات $-\imath\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ، $-\imath\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ ، $-\imath\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ فإن معادلة (4.3) تأخذ الصورة :

$$\hat{H} = V \pm c \sqrt{-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + m^2 c^2}$$

حيث العلامة (+) تقابل طاقة الحركة الموجبة بينما العلامة (-) تقابل طاقة الحركة السالبة . افترض ديراك أن الحيز الحراى الفراغ مشغول بالكامل بالحالات الكمية ذات الطاقة السالبة ولا يوجد به اى مستويات طاقة موجبة لشغلها وتتميز الالكترونات التى تشغل تلك المستويات ذات الطاقة السالبة بأنها لا تشارك فى المجال الكهربى الخارجى فاذا ماسقط فوتون ذو طاقة مناسبة بحيث يستطيع انتزاع احد هذه الالكترونات ذات الطاقة السالبة من هذا البحر الذى يشغل الحيز الحرويقذفه الى خارجة فان مكان هذا الالكترون يصبح سلوكه تماما مثل سلوك الكيون ذى شحنة موجبة وكتلته مساوية لكتلة الالكترون المعتاد وهذا السلوك يقال انه خارج مجسم الالكترون المضاد او البوزيترون (Antielectron or Positron) . وبهذا النمط البسيط يمكن لديراك تفسير ظاهرة الانتاج المزدوج للالكترون والبوزيترون (Pair Production) .

بالرجوع الى المعادلة (4.4) ملاحظ ان الهاميلتونييه لها تعقيدات عديدة تتمثل فيما يلى :

أ - من المستحيل الوصول الى تعبير رياضى يمثل تيار الاحتمال وكثافة الاحتمال $(\psi^* \psi)$ يحقق علاقة تتفق مع النظرية النسبية وفى نفس الوقت تحقق مبدأ حفظ الاحتمالية .

ب - تمنعنا من التعرف على زخم التدور دالة الحالة ψ بتغير الزخم وهذا امر اوضح ان الزخم الزاوى لا يفسر من نظرية ميكانيكا الكم .

يعنى هذا ان المعادلات (4.1) لا تمثل اساسا كافيا لميكانيكا الكم سواءً فى حلها لتعبر عن الطاقة الحرة أو لتعبر عن * ولعلنا أن نبحث عن صورة

سليمة للعامة الهاميلتونية وذلك عن طريق استبدال الجزء الذى داخل الجذر التربيعى
بمربع تام (Perfect Square) مثل :

$$(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) + m^2 c^2 = [\gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc]^2 \quad (4.5)$$

ونلاحظ ان هذه المعادلة تمثل جسيم حر (Free Particle) وعلى ذلك
لايصح ان تحتوى المعادلة الهاميلتونية الخاصة بها على حدود خاصة باحداثيات الحيز
والزمن لان مثل هذه الحدود تتصف بطاقات تعتمد على الحيز والزمن اى ينتج عن ذلك
صورا من القوى ونحن مقترضين ان المعادلة تمثل جسيم حر .

كذلك فان مشتقات الحيز والزمن تظهر فقط فى كمية التحرك الخطي p
والطاقة E وليس فى المعاملات γ_s حتى تضمن ان المعادلة خطية فى
كل هذه المشتقات . وعلى ذلك يتضح لنا ان المعاملات γ_s يجب ان لا تعتمد
على x و t و p و E اى انها تتبادل مع تلك المتغيرات جميعا . وعلى
ضوء ذلك نوجد مفكوك الجانب الايمن من معادلة (4.5) ونتبع ذلك بالشروط
الرياضية التى تحقق هذه الملاحق الفيزيائية التى اسردناها :

$$\begin{aligned} & [\gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc]^2 \\ &= \gamma_x^2 p_x^2 + \gamma_y^2 p_y^2 + \gamma_z^2 p_z^2 + \gamma_m^2 m^2 c^2 \\ &+ (\gamma_x \gamma_y + \gamma_y \gamma_x) p_x p_y \\ &+ (\gamma_x \gamma_z + \gamma_z \gamma_x) p_x p_z \\ &+ (\gamma_x \gamma_m + \gamma_m \gamma_x) p_x mc \\ &+ (\gamma_y \gamma_z + \gamma_z \gamma_y) p_y p_z \\ &+ (\gamma_y \gamma_m + \gamma_m \gamma_y) p_y mc \\ &+ (\gamma_z \gamma_m + \gamma_m \gamma_z) p_z mc \end{aligned} \quad (4.6)$$

ولكى يتسارى هذا المفكوك مع الطرف الايسر لمعادلة (4.5) يجب ان تكون الشروط التالية محققة :

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = \gamma_m^2 = 1 \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x \gamma_y + \gamma_y \gamma_x &= 0 \\ \gamma_x \gamma_z + \gamma_z \gamma_x &= 0 \\ \gamma_x \gamma_m + \gamma_m \gamma_x &= 0 \\ \gamma_y \gamma_z + \gamma_z \gamma_y &= 0 \\ \gamma_y \gamma_m + \gamma_m \gamma_y &= 0 \\ \gamma_z \gamma_m + \gamma_m \gamma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

ويقال حينئذ ان المعاملات γ_s تتبادل بالتضاد (Anticommutate) كسجل منها مع الاخر . وفي الحقيقة معادلات (4.7) و (4.8) يمكن جمعها فسي معادلة واحدة كالآتي :

$$\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = 2 \delta_{kl} \quad (4.9)$$

وعندما تطبق المعاملات γ_s معادلات (4.7) و (4.8) و (4.9) فان هذا يعنى :

$$\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m^2 c^2} = \gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc$$

ونأخذ المعادلة الهاميلتونية في معادلة (4.4) الشكل التالي :

$$\hat{H} = V - c (\gamma_x p_x + \gamma_y p_y + \gamma_z p_z + \gamma_m mc) \quad (4.10)$$

وبما ان المعاملات γ_s تتبادل بالتضاد كل منها مع الاخر فعنى ذلك انها ليست اعداد عادية وفي الحقيقة يجب ان تكون عاملات خطية وعلى ذلك يمكن تمثيلها علبسى النحو الموضح (وتسمى عاملات ديراك (Dirac Operators)) :

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ونلاحظ انها مصفوفات (4×4) - وهى اصغر مصفوفة تحقق العلاقة (4.9) - ونتيجة لذلك فان دوال ديراك ψ التى ستؤثر عليها تلك المصفوفات يجب ان تكون لها اربع مركبات على النحو التالى :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

وعلى ذلك تكون المعادلة الموجية الايجينية ($\hat{H}\psi = E\psi$) بالصورة :

$$(V - c \gamma_x p_x - c \gamma_y p_y - c \gamma_z p_z - \gamma_m mc^2) \psi = E \psi \quad (4.13)$$

وهي معادلة ديراك الموجية . وبالتعويض عن المعاملات γ_s تأخذ الشكل التالي بدلالة الصفوفات مع ملاحظة ان طاقة الوضع V بما انها كمية فيزيائية يمكن تعيينها في المعمل إذا نعوض عنها كصفوفة محورية (4×4) :

$$\begin{bmatrix} V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & cp_x \\ 0 & 0 & cp_x & 0 \\ 0 & cp_x & 0 & 0 \\ cp_x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -icp_y \\ 0 & 0 & icp_y & 0 \\ c & -icp_y & 0 & 0 \\ icp_y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & cp_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cp_z \\ cp_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -cp_z & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mc^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -mc^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V - mc^2 & 0 & -cp_z & -c(p_x - ip_y) \\ 0 & V - mc^2 & -c(p_x + ip_y) & cp_z \\ -cp_z & -c(p_x - ip_y) & V + mc^2 & 0 \\ -c(p_x + ip_y) & cp_z & 0 & V + mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} (V - mc^2)\psi_1 - cp_z\psi_3 - c(p_x - ip_y)\psi_4 \\ (V - mc^2)\psi_2 - c(p_x + ip_y)\psi_3 + cp_z\psi_4 \\ -cp_z\psi_1 - c(p_x - ip_y)\psi_2 + (V + mc^2)\psi_3 \\ -c(p_x + ip_y)\psi_1 + cp_z\psi_2 + (V + mc^2)\psi_4 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

(4.14)

$$(V - mc^2)\psi_1 - cp_z\psi_3 - c(p_x - ip_y)\psi_4 = E\psi_1$$

$$(V - mc^2)\psi_2 - c(p_x + ip_y)\psi_3 + cp_z\psi_4 = E\psi_2$$

$$-cp_z\psi_1 - c(p_x - ip_y)\psi_2 + (V + mc^2)\psi_3 = E\psi_3$$

$$-c(p_x + ip_y)\psi_1 + cp_z\psi_2 + (V + mc^2)\psi_4 = E\psi_4$$

(4.15)

وأخيرا باستبدال p_x بالمعادلة $(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})$... الخ نحصل على :

$$\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E-V}{c} + mc \right) \psi_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_4 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E-V}{c} + mc \right) \psi_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E-V}{c} - mc \right) \psi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 = 0$$

$$\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E-V}{c} - mc \right) \psi_4 + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_1 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 = 0$$

(4.16)

ومن هذا يتضح لنا ان المعادلة المفردة التي وضعها ديراك (معادلة

(4.13) هي في الحقيقة تقابل اربع معادلات تفاضلية جزئية محددة (4.16).

ولتحديد مستويات الطاقة الخاصة بالالكترون الذي يصبح في مجال كهروستاتيكي

حيث يتميز الالكترون بطاقة وضع $V(x, y, z) = V$ علينا ان نحسب القيم

العددية للطاقة E التي تحقق ان معادلات (4.16) لها حلول حتمية

السلوك بمعنى ان احدى الدوال ψ_1 و ψ_2 و ψ_3 و ψ_4 على

الاقل تختلف عن الصفر وكذلك حتمية السلوك بمفهوم نظرية شورونجر * ولقد وضح

ديراك ان مثل هذه الحسابات تسهل بعض الشيء بوضع الصفوف γ بالصورة

التالية :

$$\gamma_x = \rho_1 \sigma_x, \quad \gamma_y = \rho_1 \sigma_y, \quad \gamma_z = \rho_1 \sigma_z$$

حيث

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_x = \rho_1 \sigma_x \quad \text{وعليه حيث أن :}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\therefore x_{12} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = 1$$

وبقية العناصر في الطرف الأيمن من معادلة (4.17) يساوى صفراً

$$\therefore \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

وبالمثل نحصل على الصورتين σ_y و σ_z كما يلي :

$$\therefore \gamma_y = \rho_1 \sigma_y$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \\ y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \end{pmatrix}$$

$$\therefore y_{34} = -1, \quad y_{43} = 1, \quad y_{12} = -1, \quad y_{21} = 1$$

$$\therefore \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\therefore Y_z = \rho_1 \sigma_z$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \end{pmatrix}$$

$$\therefore z_{33} = 1, z_{44} = -1, z_{11} = 1, z_{22} = -1$$

$$\therefore \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

والان نلاحظ ان المعادلة الهاميلتونية في معادلة (4.10) يمكن كتابتها كما يلي :

$$\hat{H} = \hat{V} - \mu_1 (\gamma_x \hat{p}_x + \gamma_y \hat{p}_y + \gamma_z \hat{p}_z) - \gamma_m mc^2 \quad (4.21)$$

وعلينا ان نبحث عن طبيعة ثوابت الحركة المرتبطة بهذه الهاميلتونية في صورتها
(4.21) التي اوضحها ديراك .

ولعمل ذلك علينا في هذه الخطوة ان نراجع بعض الاساسيات لميكانيكا الكم
المرتبط بهذا الاطار :

نهما لما اوضحه هايزنبرج فان معادلة الحركة الخاصة بأى متغير ديناميكي \hat{F}
تكتب اساسا على النحو التالي :

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{F}, \hat{H} \right] \quad (4.22)$$

حيث الجانب الايسر من معادلة (4.22) عبارة عن المصفوفة التي عناصرها تمثّل
ما يعرف بالمشتقة التفاضلية الكلية بالنسبة للزمن للمصفوفة التي تمثل المتغير الديناميكي
 \hat{F} . بينما في الجانب الايمن يمثل الحد الاول مصفوفة التفاضل الجزئى

للتغير \hat{P} بالنسبة للزمن حيث يؤخذ في الاعتبار كيفية اعتمادها على احدائسى الزمن بالضبط . اما الجزء الاخر من الجانب الايمن فيمثل جزء المشتقة التفاضلية للتغير \hat{P} الذى ينتج عن التغير الزمنى للدوال الموجية التى يتم حساب المصفوفة بالنسبة لها .

ولنحسب مفكوك قوس التبادل للمركبة السينية لمادة ديراك التى تمثل كمية التحرك الخطى (وسوف نستخدم لذلك الرمز L_x) :

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{H}] &= \hat{L}_x \hat{H} - \hat{H} \hat{L}_x \\ &= \hat{L}_x \left\{ \hat{v} - c \rho_1 (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z) - \gamma_m mc^2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \hat{v} - c \rho_1 (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z) - \gamma_m mc^2 \right\} \hat{L}_x \\ &= \gamma_m \quad \text{و} \quad \hat{p}_x \quad \text{و} \quad \hat{v} \quad \text{تبادل مع كل من} \quad L_x \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \therefore [\hat{L}_x, \hat{H}] &= L_x \left\{ -c \rho_1 (\sigma_y p_y + \sigma_z p_z) \right\} \\ &\quad - \left\{ c \rho_1 (\sigma_y p_y + \sigma_z p_z) \right\} L_x \\ &= -c \rho_1 L_x \sigma_y \sigma_y - c \rho_1 L_x \sigma_z p_z + c \rho_1 \sigma_y p_y L_x \\ &= -c \rho_1 \sigma_y (L_x p_y - p_y L_x) - c \rho_1 \sigma_z (L_x p_z - p_z L_x) \\ &= -c \rho_1 \left\{ \sigma_y (i \hbar p_z) - \sigma_z (-i \hbar p_y) \right\} \\ &= -i \hbar c \rho_1 [\sigma_y p_z - \sigma_z p_y] \neq \text{Zero} \quad (4.24) \end{aligned}$$

اى ان المركبة L_x فى اطار نظرية ديراك لا تتبادل مع العامل الهاملتونى أى انها ليست ثابت للحركة (بعكس الوضع فى الميكانيكا الكلاسيكية حيث L_x ثابت للحركة)
لا يكون يتحرك فى مجال كهروستاتيكي مركزي (مثل ما هو موجود فى اى ذرة هـسـن ذرات المادة) .

والان بالنسبة للمركبة σ_x والتي تتبادل مع كل كمية فيزيائية موجودة فـسـى
معادلة (4-23) ماعدا σ_y و σ_z فهذا معناه :

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_x, \hat{H}] &= \sigma_x \left\{ V - c \rho_1 (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z) - \gamma_m mc^2 \right. \\ &\quad \left. - \left\{ V - c \rho_1 (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z) - \gamma_m mc^2 \right\} \sigma_x \right. \\ &= \sigma_x \left\{ -c \rho_1 (\sigma_y p_y + \sigma_z p_z) \right\} - \left\{ -c \rho_1 (\sigma_y p_y + \sigma_z p_z) \right\} \sigma_x \\ &= -c \rho_1 (\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x) p_y + c \rho_1 (\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z) p_z \end{aligned}$$

ولكننا نعلم ان :

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اى أن :

— ٥٦ —

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \\ &= 2i \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i \sigma_z. \quad (4.25) \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2i \sigma_z \quad (4.25)$$

وبالمثل :

$$\sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y = 2i \sigma_x$$

$$\sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z = 2i \sigma_y$$

$$\begin{aligned} \therefore [\hat{\sigma}_x, \hat{H}] &= \sigma_x H - H \sigma_x = -c \rho_1 (2i \sigma_z) p_y + c \rho_1 (2i \sigma_y) p_x \\ &= 2i c \rho_1 (\sigma_y p_z - \sigma_z p_y) \quad (4.27) \end{aligned}$$

ولقد رأينا أن :

$$\begin{aligned}\hat{L}_x \hat{H} - \hat{H} \hat{L}_x &= -i \hbar c \rho_1 \cdot (\hat{\sigma}_y \hat{p}_z - \hat{\sigma}_z \hat{p}_y) \\ &= -i \hbar c \rho_1 \cdot \frac{\hat{\sigma}_x \hat{H} - \hat{H} \hat{\sigma}_x}{2 i c \rho_1} \\ &= -\frac{1}{2} \hbar (\hat{\sigma}_x \hat{H} - \hat{H} \hat{\sigma}_x)\end{aligned}$$

$$\therefore (\hat{L}_x \hat{H} + \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x \hat{H}) - (\hat{H} \hat{L}_x + \frac{1}{2} \hbar \hat{H} \hat{\sigma}_x) = 0$$

$$\therefore (\hat{L}_x + \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x) \hat{H} - \hat{H} (\hat{L}_x + \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x) = 0 \quad (4.28)$$

أي أن المتغير الديناميكي " $(\hat{L}_x + \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x)$ " هو أحد ثوابت الحركة في مجال مركزي • ونلاحظ أن الكمية " $(\frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x)$ " التي يجب إضافتها إلى \hat{L}_x قبل أن نحصل على ثابت الحركة " $(\hat{L}_x + \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x)$ " أصلها هو في أساسيات النظرية النسبية التي أدت إلى استخدام هاميلتونية ديراك (معادلة (4.10)) بدلاً من هاميلتونية شرودنجر • أي أن " $(\frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_x)$ " تمثل أحد تأثيرات النظرية النسبية • وتعرف هذه بالمركبة السببية للحركة المغزلية للإلكترون (موسع أن موضوع الحركة الدورانية لم يذكر بالمرة في نظرية ديراك) •

هذا الاكتشاف الهام للحركة المغزلية لجسيم الإلكترون ومن ثم لبغية الجسيمات الأولية على التتابع. على سبيل المثال من الناحية العملية أدت التجارب إلى اكتشاف الحركة المغزلية للإلكترون عام ١٩٢٤ بينما للبروتون عام ١٩٢٨ والنيوترون عام ١٩٤٢ والهيوتون عام ١٩٢٤ والميزون باي عام ١٩٤٧ والنيوترينو عام ١٩٧٢) أدت إلى عسدة ظواهر فيزيائية هامة مثل :

١ - ادى اكتشاف الحرية المغزلية للالكترين الى الفهم الصحيح لترتيب الالكترونات في ذراتها وتفاعلات الذرات مع بعضها والصفات الفيزيائية والكيميائية للسواد ولقد تم هذا الاكتشاف عن طريق تجارب زيمان Zeeman •

٢ - ادى اكتشاف الحرية المغزلية للهوتون والنيوترون - عن طريق تجارب رابساى Rabi والفاريز Alvarez - الى اعتبارها ذين الجسيمين على ان كل منهما عبارة عن حالة كمية مختلة لجسيم واحد وهو النيوكليون وبالتالي فهم وتبسيط العديد من الظواهر النووية •

٣ - ادى اكتشاف الحرية المغزلية للميزونات الى زيادة مدى فهم الملميين للعديد من ظواهر التفاعلات النووية والاشعة الكونية •

٤ - ادى اكتشاف ان الحرية المغزلية تنصف بعدد كم إما ان يكون عدد صحيح من $\frac{1}{2}$ الى التعرف على مجوعة الجسيمات الأولية المعروفة بالميزونات والسر يحكم تصرفاتها قوانين الاحصاء الكمية السماء باحصاء (بوز - اينشتين) بينما الحرية المغزلية التى تقابل عدد كم نصف عدد صحيح تعرف باسم الغير ميونس ويتحكم فى تصرفاتها قوانين احصاء (فيرمى - ديراك) وكذلك مبدأ اللاتحديد لهايزنبرج •

ملحوظة : الامثلة المحلولة المرتبطة بهذا الباب اضيفت الى الامثلة المحلولة فى الباب الخامس •

الباب الخامس

مزاوجة (أو تقارُن) كموات الحركة الزاوية

(Coupling of Angular Momenta)

—

يقصد بمزاوجة كموات الحركة الزاوية التراكب الانجافى لاثنتين أو أكثر من متجه كمية الحركة الزاوية . وهذه المزاوجة تتضح لنا لتفسير كثير من الظواهر الخاصة بالتفاعلات الذرية والتفاعلات النووية وتفاعلات الجسيمات الأولية . فعلى سبيل المثال :

— مزاوجة متجه كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة الدائرية (Orbital Motion) لجسيم أولى مع كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة المغزلية (Spinning Motion) الذاتية لنفس الجسيم . هذا يقابل ما يحدث فى حالة حركة الالكترونات فى " مداراتها " الذرية والحركة المغزلية الذاتية لكل منها . وكذلك ما يحدث فى حالة حركة النيوكليونات (البروتونات والنيوترونات) فى " مداراتها " داخل نواة الذرة والحركة المغزلية الذاتية لكل منها .

— مزاوجة متجه كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة الدائرية لجسيم أولى مع كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة الدائرية لجسيم أولى آخر . هذا يقابل ما يحدث أثناء استطارة الاشعاعات النووية واستطارة الجسيمات الأولية بواسطة أهداف نووية .

— مزاوجة كمية الحركة الزاوية المرتبطة بالحركة المغزلية الذاتية لجسيم مع مثيلتها لجسيم آخر ومن امثلة ذلك تفسير بعض خصائص الميزونات والهيبيرونات والزينيسية

(Resonance Mesons and Hyperons) وجسيمات الكوارك
• (Quarks)

- مزاجية حجة كمية الحركة الزاوية النظرية (Isotopic Spin Angular Momentum) لجسيم مع حجة كمية الحركة الزاوية النظرية لجسيم آخر.
ومن أبسط الأمثلة على ذلك من الخصائص العامة لأنوية الذرات ونسج
نتائج المشاهدات التجريبية الخاصة باستطارة الانعاطات النووية .

ولنبدأ الآن بدراسة بعض أساسيات هذه المزاجية في أبسط صورها ولذلك
سوف نكتفي بمزاجية اثنين فقط من متجهات كمية الحركة الزاوية ولنميز لهما بالرمز \vec{J}_1 و \vec{J}_2 ولنميز للنتيجة الناتجة من هذا التآثر بالرمز \vec{J} .
وجد أن \vec{J} يتميز بنفس الخصائص التي يتميز بها أى عائلة كمية حركة زاوية
بمعنى أن :

$$\begin{aligned} \vec{J} \times \vec{J} &= (\vec{J}_1 + \vec{J}_2) \times (\vec{J}_1 + \vec{J}_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & j & k \\ J_x & J_y & J_z \\ J_x & J_y & J_z \end{vmatrix} = 1 (J_y J_z - J_z J_y) \\ &\quad + j (J_z J_x - J_x J_z) \\ &\quad + k (J_x J_y - J_y J_x) \end{aligned}$$

أى أن المركبة السينية $(J_y J_z - J_z J_y) = J_x$ عبارة عن :

$$\begin{aligned} (J \times J)_x &= J_{1y} J_{2z} + J_{1y} J_{2z} + J_{2y} J_{1z} + J_{2y} J_{1z} \\ &\quad - J_{1z} J_{1y} - J_{1z} J_{2y} - J_{2z} J_{1y} - J_{2z} J_{2y} \end{aligned}$$

وبما أن J_1 و J_2 تتبادلان مع بعضهما فمعنى هذا أن
 $J_{1Y}J_{2Z} = J_{2Z}J_{1Y}$ ، والخ . وعلى ذلك :

$$\begin{aligned}(J \times J)_X &= (J_{1Y}J_{1Z} - J_{1Z}J_{1Y}) + (J_{2Y}J_{2Z} - J_{2Z}J_{2Y}) \\ &= i \hbar J_{1X} + i \hbar J_{2X} = i \hbar (J_{1X} + J_{2X}) = i \hbar J_X\end{aligned}$$

أى أن

$$(J \times J)_X = i \hbar J_X$$

وعلى غرار ما درستاه في الباب الثالث لنفرض أن :

$|j_1 m_1\rangle = \psi_1(j_1 m_1)$: هي الدالة الايجينية التى تنتمى للقيمة الايجينية
 j_1 و m_1 للمعاملة J_1^2 وفى نفس الوقت تنتمى للقيمة الايجينية m_1 للبركة المبنية J_{1Z} (ونود ان نشير هنا ان المعاملة J_2 ليس لها أى تأثير
 على تلك الدوال $|j_1 m_1\rangle$)

وبالمثل $|j_2 m_2\rangle = \psi_2(j_2 m_2)$ هي الدالة الايجينية التى
 تنتمى للقيمتين الايجينيتين $j_2(j_2 + 1)\hbar^2$ و m_2 للمعاملتين J_2^2 و J_{2Z}
 فى نفس الوقت . وهذا ايضا J_1 ليس لها أى تأثير على تلك الدوال . وعلى ذلك
 نستطيع التمييز عن هذا بالملاقات الاربعة التالية :

$$J_1^2 \psi_1(j_1 m_1) = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 \psi_1(j_1 m_1) \quad (5.1)$$

$$J_{1Z} \psi_1(j_1 m_1) = m_1 \hbar \psi_1(j_1 m_1) \quad (5.2)$$

$$J_2^2 \psi_2(j_2 m_2) = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 \psi_2(j_2 m_2) \quad (5.3)$$

$$J_{2Z} \psi_2(j_2 m_2) = m_2 \hbar \psi_2(j_2 m_2) \quad (5.4)$$

وكما درسنا في الباب الثالث حيث ان كل قيمة ايجينية $j_1(j_1 + 1) \hbar^2$ يقابلها $(2j_1 + 1)$ قيم ممكنة للمدد الكمية m_1 وكذلك كل قيمة ايجينية $j_2(j_2 + 1) \hbar^2$ يقابلها $(2j_2 + 1)$ قيم ممكنة للمدد الكمية m_2 إذا هناك عدد $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ من الدوال :

$$\psi(j_1 j_2 m_1 m_2) = \psi_1(j_1 m_1) \psi_2(j_2 m_2) \quad (5.5)$$

وهذه تكون مجموعة كاملة من الضربات الخاصة للعاملات \hat{j}_1^2 و \hat{j}_{1z} و \hat{j}_2^2 و \hat{j}_{2z} في نفس الوقت . ومعادلة (5.5) تُعبر عن الدالة الايجينية التي تتشعب في نفس الوقت للقيم الايجينية $j_1(j_1 + 1) \hbar^2$ و $j_2(j_2 + 1) \hbar^2$ من ناحية اخرى حيث ان :

$$\hat{j}^2 = \hat{j}_1^2 + \hat{j}_2^2 + 2 \hat{j}_1 \hat{j}_2 \quad (5.6)$$

ويتبادل \hat{j}_1^2 و \hat{j}_2^2 و \hat{j}^2 كل ضما مع الاخر . فان معنى ذلك استطاعتنا التعبير عن نفس المجموعة الفيزيائية التي نتناولها هنا بالدراسة بدلالة الاتجاه الايجيني $\Phi(j_1 j_2 m)$ الذي ينتج للقيم الايجينية $m \hbar$ و $j(j + 1) \hbar^2$ و $j_2(j_2 + 1) \hbar^2$ و $j_1(j_1 + 1) \hbar^2$.

وتؤد الآن ايجاد تحويل توحيدى (Unitary Transformation) السدى يمكننا من التعبير عن الدوال Φ بدلالة الدوال ψ او العكس (وهذا يقابل دوران الماوير الاحداثية في الحيز المتواجد فيه تلك الدوال " ويعرف بحيز هيلبرت Hilbert Space) :

في البداية نلاحظ مايلي :

$$\begin{aligned}
 J_z \psi(j_1 j_2 m_1 m_2) &= (J_{1z} + J_{2z}) \psi_1(j_1 m_1) \psi_2(j_2 m_2) \\
 &= J_{1z} \psi_1(j_1 m_1) \psi_2(j_2 m_2) + J_{2z} \psi_1(j_1 m_1) \psi_2(j_2 m_2) \\
 &= (m_1 + m_2) \hbar \psi_1(j_1 m_1) \psi_2(j_2 m_2) \\
 &= (m_1 + m_2) \hbar \psi(j_1 j_2 m_1 m_2) \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

أي ان الدالة $\psi(j_1 j_2 m_1 m_2)$ هي دالة ايجينية تتوى للقيمة الايجينية J_z $(m_1 + m_2) \hbar$ للعاملة

$$|m_2| \leq j_2 \quad , \quad |m_1| \leq j_1$$

$$\therefore |m_1 + m_2| \leq (j_1 + j_2) \quad (5.8)$$

فإذا فرض واعطينا قيم j_1 و j_2 نود ان نوجد القيم التي يمكن ان تتخذها j (على سبيل المثال اذا كان $j_1 = 1 \hbar$ و $j_2 = \frac{1}{2} \hbar$ معنى ذلك ان m_1 تأخذ القيم $1 \hbar$ و 0 و $-1 \hbar$ بينما m_2 تأخذ القيم $\frac{1}{2} \hbar$ و $-\frac{1}{2} \hbar$ وعلى ذلك تكون القيم الممكنة للمجموع $m_1 + m_2$ عددها ستة).

بما ان اكبورية للمدد m_1 هو j_1 واكبورية للمدد m_2 هو j_2 فهذا معناه ان اكبورية للمدد j هو :

$$j_{\max} = (m_1)_{\max} + (m_2)_{\max} = j_1 + j_2 \quad (5.9)$$

معنى ذلك ان هناك حالة كمية مفردة يمثلها الاتجاه الايجيني $\Phi(j_1 j_2 j m)$ حيث :

$$\begin{aligned}
 \Phi(j_1 j_2 j m) &= \Phi(j_1 j_2 \quad j_1+j_2 \quad j_1+j_2) \\
 &= \psi(j_1 m_1 j_2 m_2) \\
 &= \psi(j_1 j_1 j_2 j_2) \\
 &= \psi_1(j_1 j_1) \psi_2(j_2 j_2) \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

هذا عندما تكون m لها أكبر قيمة ممكنة لها وهى $m = j_1 + j_2$ تبعاً للمادة (5.9) .

بعد ذلك عندما تأخذ m القيمة التى تلى تلك القيمة $(j_1 + j_2)$ أى $(j_1 + j_2 - 1)$ يكون هناك حالتان كيتان مختلفتان تتلّان بالتجهين :

$$\begin{aligned}
 &\Phi(j_1 j_2 \quad j_1+j_2 \quad j_1+j_2-1) \\
 6 \quad &\Phi(j_1 j_2 \quad j_1+j_2-1 \quad j_1+j_2-1)
 \end{aligned}$$

وسبب ذلك ان عدد الكم m يأخذ القيمة $j_1 + j_2 - 1$ "هدمسا" تكون $j = j_1 + j_2$ "أو عندما تكون $j = j_1 + j_2 - 1$ "وأحدهما تقابل الحالة ($m_1 = j_1 - 1$ " و $m_2 = j_2$ ") بينما الاخرى تقابل الحالة

($m_1 = j_1$ " و $m_2 = j_2 - 1$ ") - يدهى ان هذا لا ينطبق فى حالة j_1 أو j_2 يساوى اى منهما صفراً - هاتان الحالتان يكمن اعتبارهما نتيجة الجمع الخطى للتجهين :

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_1 \quad j_2-1) , \quad \psi(j_1 j_2 \quad j_1-1 \quad j_2)$$

بالمثل عدداً تكون \square مساوية للقيمة التي تلي $j_1 + j_2 - 1$ أى القيمة $j_1 + j_2 - 2$ يكون لدينا ثلاث حالات هى :

$$\Phi(j_1 j_2 \quad j_1 + j_2 \quad j_1 + j_2 - 2)$$

$$\Phi(j_1 j_2 \quad j_1 + j_2 - 1 \quad j_1 + j_2 - 2)$$

$$\Phi(j_1 j_2 \quad j_1 + j_2 - 2 \quad j_1 + j_2 - 2)$$

وتعتبر ناتجة من الجمع الخطئى للتجهيزات التالية :

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_1 \quad j_2 - 2)$$

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_1 - 1 \quad j_2 - 1)$$

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_2 - 2 \quad j_2)$$

ومطابقة نفس هذا المطلوب يتضح لنا إذا أنه بمعة طاة فان للقيمة

$\square = j_1 + j_2 - k$ يكون لدينا عدداً من التجهيزات ψ مساوية $(k + 1)$ هى :

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_1 - k \quad j_2)$$

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_1 - k + 1 \quad j_2 - 1)$$

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_1 - k + 2 \quad j_2 - 2)$$

⋮

$$\psi(j_1 j_2 \quad j_1 \quad j_2 - k)$$

وبالجمع الخطى لهذه التجربات نحصل على الحالات الكمية التالية :

$$\Phi(j_1 j_2 \quad j_1 + j_2 \quad j_1 + j_2 - k)$$

$$\Phi(j_1 j_2 \quad j_1 + j_2 - 1 \quad j_1 + j_2 - k)$$

$$\Phi(j_1 j_2 \quad j_1 + j_2 - 2 \quad j_1 + j_2 - k)$$

⋮

$$\Phi(j_1 j_2 \quad j_1 + j_2 - k \quad j_1 + j_2 - k)$$

ومع افتراض أن j_1 أصغر من j_2 وسبب أن إصفرية للمعد m_2 هي $j_2 -$ (راجع معادلة (3.25)) إذا أكبرية للمعد k هو :

$$j_2 - k = -j_2$$

$$\therefore k = 2 j_2$$

$$\therefore j_{\min} = j_1 + j_2 - k = j_1 + j_2 - 2 j_2 = j_1 - j_2$$

وهذا يوضح أن القيم الممتدة للمعد j هو : " $j_1 + j_2 \geq j \geq j_1 - j_2$ " :
أي أن عددها $(2 j_2 + 1)$.

ولتوضيح استخدام تلك الأساسيات لنحاول الآن الحصول على التجربات
الايجنينية في حالة مزاجية كميتي حركة زاوية كل منهما يماوى $\frac{1}{2} \hbar$ كما يحدث
مثلاً عند تفاعل بروتون وبروتون آخر أو نيوترون - أو تفاعل ميزون K مع نيوكليون
(في هذه الحالة j_1 أو j_2 ترمزان لكمية الحركة المخرلية النظرية) :

في هذه الحالة " $j_1 = \frac{1}{2}$ " ، " $j_2 = \frac{1}{2}$ " فان :

$$\begin{aligned}\Phi(j_1 j_2 \quad j_m) &= \Phi_{1,1} \\ &\quad , \Phi_{1,-1} \\ &\quad , \Phi_{1,0} \\ &\quad , \Phi_{0,0}\end{aligned}$$

حيث :

$$\Phi_{1,1} = \psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1}$$

$$\Phi_{1,-1} = \psi_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \Phi_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,-1}$$

$$\Phi_{1,0} = a_1 \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + a_2 \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0}$$

$$\Phi_{0,0} = a_3 \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + a_4 \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0}$$

ونود الحصول على قيم الممالات a_1 و a_2 و a_3 و a_4

$$\begin{aligned}• \quad [J_z, J_+] &= J_+ &• \quad \text{سبق ان درسنا ان :} \\• \quad [J_+, J_-] &= 2 J_x &• \quad [J_-, J_z] = -J_- \\• \quad [J^2, J_+] &= 0 &• \quad [J^2, J_-] = 0\end{aligned}$$

ونلاحظ ان الدوال $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,-1}$ و $\Phi_{1,0}$ تعرف بنفس
قيمة J ولكن تختلف في قيمة J_z ومعنى ذلك ان تلك الدوال الثلاث تنتمي
لنفس القيمة الايجينية للعامة J ولذلك فهي تكون مجموعة واحدة من ثلاث

دوال ولهذا السبب تسمى بالمجموعة " الثلاثية " (Triplet) • بينما الدالة الرابعة $\Phi_{0,0}$ تكون مجموعة " فردية " (Singlet) • والسؤال الذى نواجههنا الان تتلخص فى ايجاد المعاملات a_1 و a_2 و a_3 و a_4 •
(فيما بعد سوف يتضح لنا ان تلك المعاملات a_i مرتبطة ارتباطا مباشرا بالكمية الفيزيائية المعروفة باسم القطع المستعرض للتفاعلات المختلفة بين الجسيمات الأولية والتى تعطينا مقياسا لاحتمالية حدوث تلك التفاعلات) •

لنأخذ ذلك كمثال من طامات الرفع والخفض (Raising and Lowering Operators) J_+ و J_- التى اعرضنا اليها تروا :

بتطبيق معادلة (3.15) على الدالة $\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ للجسيم الاول نحصل على :

$$J_+ \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = C_+ \psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \quad (5.11)$$

بينما معادلة (3.19) تسمى الى :

$$J_- \psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = C_- \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \therefore J_+ \{ J_- \psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \} &= J_+ \{ C_- \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \} = C_- \{ J_+ \psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \} \\ &= C_- C_+ \psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = |C_+|^2 \psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \quad (5.13) \end{aligned}$$

وضرب طرفى هذه المعادلة من جهة اليسار فى $\psi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ واجراء التكامل على الحيز الناتج ينتج

$$\int \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^* (1^J_+ 1^J_-) \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} dV = |c_+|^2 \quad (5.14)$$

ولكن بتطبيق معادلة (3.23) نجد أن :

$$1^J_+ 1^J_- = (J_1 - J_{1z}) (J_1 + J_{1z} + 1) \quad (5.15)$$

إذاً من معادلتى (5.14) و (5.15) نحصل على :

$$|c_+|^2 = (J_1 - J_{1z}) (J_1 + J_{1z} + 1)$$

$$\therefore |c_+| = \sqrt{(J_1 - J_{1z}) (J_1 + J_{1z} + 1)} \quad (5.16)$$

وبنفس الأسلوب نحصل على :

$$|c_-| = \sqrt{(J_1 + J_{1z}) (J_1 - J_{1z} + 1)} \quad (5.17)$$

وبتطبيق هذه النتيجة على معادلة (5.12) نجد أن :

$$\begin{aligned} 1^J_- 1^J \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= c_- 1^J \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(\frac{1}{2} + (+\frac{1}{2})) (\frac{1}{2} - (+\frac{1}{2}) + 1)} 1^J \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(1) (1)} 1^J \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = 1^J \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

وبالمثل :

$$2^J_- 2^J \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 2^J \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

من ناحية أخرى :

$$J_- \Phi_{1,1} = \sqrt{(1+1)(1-1+1)} \Phi_{1,0} = \sqrt{2} \Phi_{1,0} \quad (5.20)$$

بينما

$$\begin{aligned} J_- \Phi_{1,1} &= J_- \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = (J_{1-} + J_{2-}) \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ &= (J_{1-} + J_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}) \\ &= J_{1-} \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}) + J_{2-} \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (J_{1-} \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - J_{1-} \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + J_{2-} \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - J_{2-} \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}) \\ &= \psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

وعلى ذلك من معادلتى (5.20) و (5.21) نحصل على :

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \Phi_{1,0} &= \psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \\ \therefore \Phi_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.23)$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.24)$$

والحصول على a_3 ; a_4 نستفيد من خاصية التعامدية للدالتين $\Phi_{0,0}$ و $\Phi_{1,0}$ أى " $\Phi_{1,0}^* \Phi_{0,0} = 0$ " وبالتعويض المباشر نحصل على :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^* \right] \cdot \left[a_3 \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + a_4 \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right] = 0$$

$$\therefore \frac{a_3}{\sqrt{2}} + \frac{a_4}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\therefore a_3 = -a_4 \quad (5.25)$$

علاوة على ذلك نستطيع الاستدادة من خاصية العيارية للدالة $\Phi_{0,0}$ نحصل على :

$$\left[a_3 \psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^* + a_4 \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^* \right] \cdot \left[a_3 \psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + a_4 \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right] = 1$$

$$\therefore a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.26)$$

$$a_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.27)$$

$$\therefore \Phi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right] \quad (5.28)$$

بينما كما اوضحنا قبلا :

$$\Phi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \right] \quad (5.22)$$

$$\Phi_{1,1} = \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

$$\Phi_{1,-1} = \psi_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (5.30)$$

والآن بتطبيق نفس الأسلوب الذى اتبعناه فى معالجة مزواجه $j_1 = \frac{1}{2} \hbar$ و $j_2 = \frac{1}{2} \hbar$ لتدرس تتأين $j_1 = 1 \hbar$ مع $j_2 = \frac{1}{2} \hbar$ (مثل مزوجة الحركة المدارية لجسيم الالكترين مع الحركة المغزلية الذاتية له او مزوجة الحركة النظرية لميزون بياى $(\pi\text{-meson})$ مع الحركة المغزلية النظرية لنيوكليون وذلك اثناء استطارة الميزونات بياى من اهداف نيوكليونية . (ادت مثل هذه الدراسات الى التعرف على العديد من الجسيمات الاولية الرنينية)

فى هذه الحالة يكون لدينا عدد ستة من الدوال المستقلة $(2x_1+1)(2x_2+1)$ ويمكننا التعبير عنها كما يلى فى صورة الدوال

$$: \Phi(j_1 j_2 j m) = \psi_{j,m} , \quad \psi(j_1 j_2 m_1 m_2) = \psi_{m_1 m_2}$$

$$\psi(1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{2}) = \psi_{1, \frac{1}{2}}$$

$$\psi(1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad -\frac{1}{2}) = \psi_{1, -\frac{1}{2}}$$

$$\psi(1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}) = \psi_{0, \frac{1}{2}}$$

$$\psi(1 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2}) = \psi_{0, -\frac{1}{2}}$$

$$\psi(1 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2}) = \psi_{-1, \frac{1}{2}}$$

$$\psi(1 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2}) = \psi_{-1, -\frac{1}{2}}$$

$$6 \quad \Phi(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}$$

$$\Phi(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$\Phi(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}$$

$$\Phi(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2}) = \Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}$$

$$\Phi(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}) = \Phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$\Phi(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}) = \Phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$$

ويتضح لنا ما سبق ان :

$$\Phi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} = \psi_{1, \frac{1}{2}} \quad (5.31)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} = \psi_{-1, -\frac{1}{2}} \quad (5.32)$$

بينما المنجيات \emptyset الاربعة الباقية يمكننا التعبير عنها على الصورة :

$$\Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = b_1 \psi_{1, -\frac{1}{2}} + b_2 \psi_{0, \frac{1}{2}} \quad (5.33)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = b_3 \psi_{0, -\frac{1}{2}} + b_4 \psi_{-1, \frac{1}{2}} \quad (5.34)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = b_5 \psi_{1, -\frac{1}{2}} + b_6 \psi_{0, \frac{1}{2}} \quad (5.35)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = b_7 \psi_{0, -\frac{1}{2}} + b_8 \psi_{-1, \frac{1}{2}} \quad (5.36)$$

حيث المعاملات b_i نفيهم على انها عناصر صفوة التحويل التوحيدي بين الدوال Φ 's ، الدوال ψ 's . كما يجب تذكرنا أن هذه العناصر كل منها يمازى صفرا اذا كان عدد الكم m غير مسموع لجميع المديين m_1 و m_2 .

وحيث ان :

$$J_- \Phi_{jm} = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \Phi_{j, m-1} , \quad J_- = J_-^1 + J_-^2$$

وأن

$$J_-^1 \psi_{m_1 m_2} = \sqrt{(1+m_1)(2-m_1)} \psi_{(m_1-1), m_2}$$

" عندما تكون " $m_1 - 1 \geq -1$ " وتمازى صفرا في حالة " $m_1 - 1 < -1$ " بينما

$$J_-^2 \psi_{m_1 m_2} = \sqrt{(\frac{3}{2} + m_2)(\frac{3}{2} - m_2)} \psi_{m_1, m_2-1}$$

" عندما تكون " $m_2 - 1 \geq -\frac{1}{2}$ " وتمازى صفرا هي الاخرى في حالة " $m_2 - 1 < -\frac{1}{2}$ " .

$$\therefore J_- \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} = \sqrt{(\frac{3}{2} + \frac{3}{2})(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 1)} \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3} \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \quad (5.37)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} = \psi_{1, \frac{1}{2}} \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} J_- \psi_{1, \frac{1}{2}} \quad (5.38)$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} J_- \psi_{1, \frac{1}{2}} &= 1J_- \psi_{1, \frac{1}{2}} + 2J_- \psi_{1, \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \psi_{0, \frac{1}{2}} + \psi_{1, -\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

إذاً من معادلتى (5.37) و (5.39) نحصل على :

$$\Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1, -\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0, \frac{1}{2}} \quad (5.40)$$

$$\therefore "b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad " \quad " \quad b_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad " \quad \text{أى أن}$$

وللحصول على باقى هذه العلاقات ننبدأ بملاحظة أن :

$$J_- \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)} \Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = 2 \Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}$$

$$\therefore J_- \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = 2 \Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} \quad (5.41)$$

بينما

$$\begin{aligned} J_- \Phi_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} &= \left\{ 1J_- + 2J_- \right\} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1, -\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0, \frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[1J_- \psi_{1, -\frac{1}{2}} + 2J_- \psi_{1, -\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} \left[1J_- \psi_{0, \frac{1}{2}} + 2J_- \psi_{0, \frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{(1+1)(2-1)} \psi_{0,-\frac{1}{2}} + 0 \right] \\
 &+ \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sqrt{(1+0)(2-0)} \psi_{-1,\frac{1}{2}} + \sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(\frac{3}{2}-\frac{1}{2})} \psi_{0,-\frac{1}{2}} \right] \\
 &= 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0,-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_{-1,\frac{1}{2}} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0,-\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \psi_{-1,\frac{1}{2}} \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

وعلى ذلك من معادلتى (5.41) و (5.42) :

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{-1,\frac{1}{2}} \quad (5.43)$$

بعد ذلك نلاحظ أن الدالة $\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ عبارة عن جمع خطى للدالتين $\psi_{1,-\frac{1}{2}}$ و $\psi_{0,\frac{1}{2}}$ مثل الدالة $\Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$ حيث أنهما تتصفان بالتماثل إذاً من معادلتى (5.35) و (5.40) نحصل على :

$$\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^* \cdot \Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore (b_5 \psi_{1,-\frac{1}{2}} + b_6 \psi_{0,\frac{1}{2}})^* \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0,\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\therefore b_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_5 \quad (5.44)$$

$$\therefore \Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = b_5 \psi_{1,-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} b_5 \psi_{0,\frac{1}{2}} \quad (5.45)$$

والموصول على ما تناوبه b_5 نستفيد من خاصية المعايرة لهذه الدالة $\Phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ بمعنى ان :

$$\left[b_5 \psi_{1, -\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} b_5 \psi_{0, \frac{1}{2}} \right]^* \cdot \left[b_5 \psi_{1, -\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} b_5 \psi_{0, \frac{1}{2}} \right] = 1$$

$$\therefore b_5 = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5.46)$$

$$\therefore \Phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{1, -\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{0, \frac{1}{2}} \quad (5.47)$$

اخيرا بالنسبة للدالة $\Phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$:

$$\Phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = b_7 \psi_{0, -\frac{1}{2}} + b_8 \psi_{-1, \frac{1}{2}} \quad (5.36)$$

نلاحظ انها عارة عن جمع خطى لنفس الدوال $\psi_{0, -\frac{1}{2}}$ و $\psi_{-1, \frac{1}{2}}$ التى تتكون منها الدالة $\Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}}$ (معادلة (5.43)) وعلى ذلك بالاستفادة من خاصية التعامدية لهاتين الدالتين نجد ان :

$$\Phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^* \cdot \Phi_{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore (b_7 \psi_{0, -\frac{1}{2}} + b_8 \psi_{-1, \frac{1}{2}})^* \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0, -\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{-1, \frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\therefore b_8 = - \sqrt{2} \ b_7 \quad (5.48)$$

$$\therefore \Phi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = b_7 \psi_{0, -\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \ b_7 \psi_{-1, \frac{1}{2}} \quad (5.49)$$

وبقوة أخرى بالاستفادة من خاصية المعايرة لهذه الدالة نحصل على :

$$(b_7 \psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{2} b_7 \psi_{-1,\frac{1}{2}})^* \cdot (b_7 \psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{2} b_7 \psi_{-1,\frac{1}{2}}) = 1$$

$$\therefore b_7 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5.50)$$

$$\therefore \Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{-1,\frac{1}{2}} \quad (5.51)$$

وعلى هذا نتخلص نتائج المطابقة التي تقابل تقاطع $j_1 = 1$ مع $j_2 = \frac{1}{2}$ بأن الدوال الايجينية لها علاقة عن الدوال الستة التالية :

$$\Phi_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \psi_{1,\frac{1}{2}} \quad (5.52,a)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{1,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0,\frac{1}{2}} \quad (5.52,b)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{0,-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{-1,\frac{1}{2}} \quad (5.52,c)$$

$$\Phi_{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}} = \psi_{-1,-\frac{1}{2}} \quad (5.52,d)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{1,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{0,\frac{1}{2}} \quad (5.52,e)$$

$$\Phi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_{0,-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{-1,\frac{1}{2}} \quad (5.52,f)$$

مثال (١٥) :

نتيجة تأثير مجال مغناطيسي خارجي \vec{B} على حركة الالكترونات في السدرة
الام يحدث انفلاق لمستويات طاقتها وهذا ما يعرف بظاهرة زيمان . وضع كوسف
ان العزم المغناطيسي الذري $\vec{\mu}$ ليس بالضرورية ان ينطبق اتجاهه مع اتجاه كمية
الحركة الزاوية الكلية الخاصة بتلك الذرة \vec{J} المساوية للجمع الاتجاهي $\vec{L} + \vec{S}$
حيث \vec{L} يرمز للحركة الزاوية " المدارية " للالكترون ، \vec{S} يرمز للحركة الزاوية
المغزلية التلقائية له .

الحل :

نعلم من مبادئ علم الفيزياء الذرية ان الطاقة W للتفاعل بين $\vec{\mu}$ و \vec{B}
عارة عن

$$W = - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

حيث

$$\vec{\mu} = \sum_1 \left[\frac{e}{m} \vec{L}_1 + \left(\frac{e}{m} \right) \vec{S}_1 \right]$$

$$\therefore \mu = \frac{e}{m} (\vec{L} + 2 \vec{S})$$

$$= \frac{e}{m} (\vec{L} + \vec{S} + \vec{S}) = \frac{e}{m} (\vec{J} + \vec{S})$$

وهذا يوضح ان $\vec{\mu}$ ليس بالضرورية أن يوازي \vec{J} نتيجة تعلق \vec{S}
مع \vec{J} .

مثال (٢٥) :

إذا علمت أن مركبات متجه الحركة الدائرية المغزلية الذاتية J_x و J_y و J_z عبارة عن حاصل ضرب $\hbar/2$ في مصفوفات باولي على التوالي • اوجد مايساويه J^2 (هذا المثال ينطبق على الالكترون — البوزون — النيوكليون — هيرون سيجما ... الخ) •

الحل :

مصفوفات باولي سوف نتذكر عبارة عن :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

إن:

$$\begin{aligned} J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

مثال (٢٥) :

لتفرض الالكترون حركته المغزلية الذاتية اقترنت بحركته المدارية التي تقابل $l = 1$ بحيث أن كمية الحركة الزاوية الميكانيكية الكلية J تساوى $\hbar/2$ • احسب القيمة المتوسطة لكل من m_1 و m_2 •

الحل :

بما أن $j_1 = 1 \hbar$ و $j_2 = \frac{1}{2} \hbar$ بينما $j = \frac{1}{2} \hbar$ إذا $m = \frac{1}{2}$ وعلى ذلك تبعا للمعادلة (5.52,e)

$$\Phi(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \Phi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi_{1, -\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \psi_{0, \frac{1}{2}}$$

إذا الطاقة الكلية تنسب الى $j = \frac{1}{2}$ و $m = \frac{1}{2}$ تتميز بما يلي :

إحتمالية تساوى $\frac{1}{3}$ بأن تكون m_1 قيمتها "١" ، m_2 قيمتها $-\frac{1}{2}$.

واحتمالية تساوى $\frac{1}{3}$ بأن تكون m_1 قيمتها "0" ، m_2 قيمتها $\frac{1}{2}$.

$$\therefore \bar{m}_1 = (1) \cdot (\frac{2}{3}) + (0) \cdot (\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$, \bar{m}_2 = (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{2}{3}) + (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{3}) = -\frac{1}{6}$$

ملحوظة : كما هو متوقع :

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

مثل القيمة المنصوص عليها في السأله .

مثال (٥) :

الدوترون مكواه لذرة الديوتيريوم تمثل حالة الترابط المستقر الوحيد بين بروتون ونيوترون ، اشرح سبب ان هذه النواة تقابل ترابط مفرد اى $\phi_{0,0}$ بفهم معادله (5.28) بالنسبة لحيز متجهات كمية الحركة الزاوية المغزلية النظيرية

• (Isotopic Spin Space)

الحل :

توضح القياسات انعمالية الخاصة بالديوترون أن هذه النواة تتميز بكمية حركة ميكانيكية مغزلية تساوى " \hbar " وأن هذا نتيجة خلط بين الحالة " $S = 1 \hbar$ " و " $\ell = 0$ " بنسبة ٠,٩٧، والحالة " $S = 1 \hbar$ " و " $\ell = 2 \hbar$ " بنسبة ٠,٠٣ أى ان الحالة الكمية للديوترون مخلوط من 3S_1 و 3D_1 بالنسب الموضحة .

وما ان النيوكليونات تتميز بتناظر زوجى بالنسبة لانعكاس الاحداثيات (Parity Operation) معنى ذلك ان تبادل الاحداثيات الكارتيزية بين البروتون والنيوترون فى هذه النواة يتميز بدالة موجبة متساوية حيث ان " $\ell = -1$ " يسمى " $+1$ " فى حالة الديوترون بما ان " $\ell = 0$ " و " $\ell = 2$ " من ناحية اخرى فان الشاهدة التجريبية توضح ايضا ان متجهى كمية الحركة المغزلية للبروتون وكمية الحركة المغزلية للنيوترون فى الديوترون متوازنان وهذا معناه ان الدالة الموجية المرتبطة بتلك الحركة المغزلية متساوية أيضا .

وتبعاً لمبدأ باولى للاستبعاد (Pauli Exclusion Principle) فمعان الدالة الموجية المحصلة التى تمثل حالة الترابط بين النيوترون والبروتون فى الديوترون يجب ان تتميز بالنعاد التماثل (Antisymmetrical) أى ان :

$$(\psi)_{\text{deuteron}} = (\psi)_{\text{space}} \cdot (\psi)_{\text{spin}} \cdot (\psi)_{\text{isospin}} \\ = \text{antisymmetrical function}$$

$$\therefore (\psi)_{\text{isospin}} \text{ must be antisymmetrical}$$

وهذا معناه ان هذه المعادلة تقابل تلك المعطاة بمعادلة (5.28) أى $\Phi_{0,0}$.

$$\therefore (\psi)_{\text{isospin}}^{\text{deuteron}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \right]$$

مثال (٥-٥) :

فى ضوء المثال السابق اشرح سبب عدم مشاهدة التفاعل النوى التالى :



الحل :

اى تفاعل نوى " قوى " يتميز - بجانب قوانين الحفظ (Conservation Laws) التى تتبعها مثل قانون حفظ الطاقة - الخ - بأنه يحافظ على كمية الحركة المغزلية النظرية " $J = T$ " وكذلك المركة العينية لها " $J_z = T_z$ " .

ومن التفاعل الموضح اعلاه نلاحظ ان :

الجسيم	T	T_z
الديوترون (d)	0	0
ألفا (α)	0	0
ميزون باى المتعادل (π^0)	1	0

هذا معناه ان الحالة الابتدائية فى هذه المعادلة تتميز بالاعداد " $T = 0$ " و " $T_z = 0$ " بينما الحالة النهائية تتميز بالاعداد " $T = 1$ " و " $T_z = 0$ " ومعنى ذلك ان هذا التفاعل تتوقع فعلا عدم حدوثه وشاهدته حيث انه لا يحافظ على T و T_z .

الباب السادس

نظرية الاقلاق مع اعتبار تغير الزمن (Time Dependent Perturbation Theory)

نود في هذا الباب دراسة بعض النقاط الخاصة بنظرية الاقلاق في ميكانيكا الكم مع الأخذ في الاعتبار ان دالة الحالة تعتمد على الزمن . وفي الحقيقة عندما تكون احتمالية تواجد مجموعة فيزيائية في اى من حالاتها المستقرة (Stationary States) متغيرة مع مرور الزمن فان تلك المجموعة يقال انها في حالة غير مستقرة (Nonstationary State) . وهناك طريقتان متوازنان عن بعضهما يحدث خلالهما تواجد مثل هذه الحالات الغير مستقرة :

أولهما عن طريق مؤثر خارجي يؤثر على المجموعة الفيزيائية بقوة خارجية متغيرة مع الزمن وهذا يجعل المجموعة الفيزيائية تنتقل من مستوى طاقة معين الى مستوى آخر . مثال ذلك امتصاص فوتين (Photon Absorption) بواسطة الكترون وبالتالي اضطراب هذا الالكترون وانتقاله من مستوى الاصل الى مستوى طاقة اعلى .

وثانيهما عن طريق خاصية مميزة للمجموعة الفيزيائية نفسها نتيجة تواجد لها نفس حالة مضطربة (Degenerate State) وحينئذ وجد أن اى اقلاق غير متغير مع الزمن (وبالتالي غير قادر على التأثير على طاقة المجموعة الفيزيائية) ربما يجعلها تنتقل من حالتها الاصلية لحالة اخرى متبعية لنفس مستوى الطاقة الاصلى (أى حالسة مضطربة ايضا) . مثال ذلك استطارة حزمة من الجسيمات الأولية (الالكترونات - نيوكليونات - ميزونات ... الخ) بواسطة مركز قوة ثابت (مثل نواة الذرة) حيث تحرف تلك الجسيمات في اتجاه آخر دون تغير في طاقتها (حالة الاستطارة

الموتة (Elastic Scattering Case) • والمعالجة الرياضية لهاذين الطريقتين واحدة ولو اننا سنُرجى " تفاصيل دراسة موضوع الاستطارة عموما للباب السابع •

هذه المعالجة تكون نظرية الاقلاق في ميكانيكا الكم مع تغير احداثى الزمن •
وبديهى اذاً أن في مثل هذا الموقف علينا ان نتعامل مع دوال الحالة المعتمدة على الزمن أى " $\psi(t)$ " •

وبعداً هذه المعالجة الرياضية بفرض ان المعاملة الهاميلتونية \hat{H} عبارة عن جزئين احدهما $\hat{H}^{(0)}$ لا يعتمد على الزمن والاخر \hat{H}^1 يعتمد على الزمن احياناً وربما في بعض الاحيان يتميز بشبهاته هو الاخر • معنى ذلك أن :

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^1 \quad (6.1)$$

وطادة يفترض ان الجزء \hat{H}^1 يمثل نسبة صغيرة بالمقارنة مع الجزء الاصلى $\hat{H}^{(0)}$ ومطلوب حل المعادلة الموجية :

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (6.2)$$

بفرض ان حلول المعادلة الموجية التى لا تحتوى على عامة الاقلاق معلومة بمعنى
ان لدينا :

$$i \hbar \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial t} = \hat{H}^{(0)} \psi^{(0)} \quad (6.3)$$

وعليه سوف يكون مطلوب الحصول على الحلول انماثلة للحالات الكمية المستقرة فقط :

$$i \hbar \frac{\partial \psi_n^{(0)}}{\partial t} = \hat{H}^{(0)} \psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(0)} \quad (6.4)$$

$$\psi_n^{(0)} = \psi_n^{(0)} e^{-\frac{E_n \cdot t}{\hbar}} \quad (6.5)$$

حيث $\psi_n^{(0)}$ ترمز للدوال الموجية العادية التي لا تعتمد على احداثى الزمن .
وهنا يتبع أسلوب مشابه للأسلوب المستخدم فى نظرية الاقلاق التي لا تأخذ الزمن فى
الاعتبار . بمعنى التعبير عن الدالة ψ بدلالة $\psi^{(0)}$ وتصحيح ψ' :

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi' \quad (6.6)$$

وبالتعويض من (6.6) فى (6.2) يتضح ان :

$$i \hbar \left(\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi'}{\partial t} \right) = \hat{H}^{(0)} \psi^{(0)} + H^{(0)} \psi' + H' \psi$$

وحيث ان " $i \hbar \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial t} = H^{(0)} \psi^{(0)}$ " تعال لمعادلة (6.3) إذا :

$$i \hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} - H^{(0)} \psi' = H' \psi \quad (6.7)$$

وهنا يستخدم الفرض السيز لهذه المعالجة الرياضية الحالية وهو الخاص بالتعبير عن
التصحيح ψ' كتسلسلة (متتالية) بدلالة الدوال الايجينية قبل تعرض المجموعة
الفرزائية لتأثير المعاملة \hat{H}' أى الدوال " $\psi_n^{(0)}$ " :

$$\psi' = \sum c_n(t) \psi_n^{(0)}$$

$$= \sum c_n(t) \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} \quad (6.8)$$

وعلى ذلك بالتعويض عن ψ' فى معادلة (6.7) واجراء التفاضل نحصل على :

$$i \hbar \sum \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} + \sum c_n(t) E_n \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}}$$

$$- \sum c_n(t) \hat{H}^{(0)} \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} = \hat{H}' \psi$$

$$\therefore \frac{1}{i\hbar} \sum \frac{\partial C_n(t)}{\partial t} c \psi_n^{(0)} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} = H' \psi$$

ونضرب المعادلة من جهة اليمين في دالة $c \psi_m^{(0)}$ " واجزاء التكامل على احداثى الحيز نجد أن :

$$\frac{1}{i\hbar} \frac{\partial C_m(t)}{\partial t} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} = \int c \psi_m^{(0)} H' \psi d\tau$$

$$c \psi_m^{(0)} = c \psi_m^{(0)} e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} \quad \text{وبما أن}$$

$$\therefore \psi_m^{(0)*} = c \psi_m^{(0)*} e^{+\frac{iE_m t}{\hbar}}$$

$$\therefore \frac{1}{i\hbar} \frac{\partial C_m(t)}{\partial t} = \int \psi_m^{(0)*} H' \psi d\tau \quad (6.9)$$

هذه المعادلة لا نستطيع استخدامها كوسيلة حسابية (ولوانها معادلة خالية من اى تقريب • واحيانا تستخدم فى معالجة مسألة الاستطارة) • ولذلك نعود بحساب $C_m(t)$ بطريقة بها شئ من التقريب • ولعمل هذا نستخدم اسلوب مشابه للمتبع فى نظرية الاقلاق الغير محتوية على احداثى الزمن • ونبدأ بالتعبير عن المعادلة H' بالصورة :

$$\hat{H}' = \lambda H^{(1)} \quad (6.10)$$

مع افتراض ان المجبرة الفيزيائية كانت فى الحالة " المستقرة " ψ_k قبل التأثير عليها بالمعالة \hat{H}' وهذا :

$$\psi' = \lambda \psi_k^{(1)} + \lambda^2 \psi_k^{(2)} + \lambda^3 \psi_k^{(3)} + \dots \quad (6.11)$$

وبالتعويض في معادلة (6.7) ونصل المعاملات المشتركة بتساوي قوى λ مع
 وضع λ يساوي واحد صحيح (وهذا لا يؤثر على عمومية تلك المعالجة الرياضية)
 نحصل على :

$$i \hbar \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial t} - \hat{H}^{(0)} \psi_k^{(1)} = \hat{H}^{(1)} \psi_k^{(0)} \quad (6.12)$$

$$i \hbar \frac{\partial \psi_k^{(2)}}{\partial t} - \hat{H}^{(0)} \psi_k^{(2)} = \hat{H}^{(1)} \psi_k^{(1)} \quad (6.13)$$

وبالتعبير عن الدوال ψ_k بدلالة الدوال الايجينية $\psi_n^{(0)}$ كما يلي
 (مع افتراض ان المعاملات الجديدة ϵ_n 's لا تختلف كثيرا عن المعاملات C_n 's) :

$$\psi_k^{(1)} = \sum \epsilon_n(t) \psi_n^{(0)} = \sum \epsilon_n(t) c \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} \quad (6.14)$$

ثم ضرب المعادلة الناتجة من التعويض في معادلة (6.12) من جهة اليسار نفسى
 $c \psi_l^{(0)*}$ واجراء التكامل على احدائى الحيز نحصل على :

$$\int i \hbar c \psi_l^{(0)*} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum \epsilon_n(t) c \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} \right\} - \hat{H}^{(0)} \sum \epsilon_n(t) c \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} \right] d\tau$$

$$= \int c \psi_l^{(0)*} \hat{H}^{(1)} c \psi_k^{(0)} e^{-\frac{i E_k t}{\hbar}} d\tau$$

$$\therefore \int i \hbar c \psi_l^{(0)*} \left\{ \sum \frac{\partial \epsilon_n(t)}{\partial t} c \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} - \frac{i E_n}{\hbar} \sum \epsilon_n(t) c \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} \right\} d\tau$$

$$= \int c \psi_l^{(0)*} \hat{H}^{(0)} \sum \epsilon_n(t) c \psi_n^{(0)} e^{-\frac{i E_n t}{\hbar}} d\tau$$

$$\begin{aligned}
 &= \int c \psi_l^{(0)} H^{(1)} c \psi_k^{(0)} d\tau \\
 \therefore i \hbar \frac{\partial \epsilon_l(t)}{\partial t} e^{-\frac{iE_l}{\hbar} t} &= \langle l | H^{(1)} | k \rangle e^{-\frac{iE_k}{\hbar} t} \\
 \therefore i \hbar \frac{\partial \epsilon_l(t)}{\partial t} &= \langle l | H^{(1)} | k \rangle e^{\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}} \quad (6.15)
 \end{aligned}$$

مع ملاحظة ان عنصر المصفوفة $\langle l | H^{(1)} | k \rangle$ يعتمد على الزمن مسن خلال العامة $H^{(1)}$. ويمكن ايجاد المعاملات $\epsilon_l(t)$ عن طريق اجراء التكامل بمعلومية سابق قيمها عند لحظة ابتدائه بمعية t_0 :

$$\epsilon_l(t) = \epsilon_l(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle l | H^{(1)} | k \rangle e^{\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}} dt \quad (6.16)$$

فاذا ما فرض ان المجموعة الفيزيائية عند الزمن t_0 بداية كانت متوزعة بالحالة الكمية $\psi_k^{(0)}$ فما هي احتمالية ان نجد هذه المجموعة عند زمن لاحق t في حالة كمية اخرى $\psi_l^{(0)}$ - حيث $l \neq k$. فيزيائيا يتضح لنا ان عند اللحظة t_0 فان كل المعاملات ϵ_n تساوى صفرا فيما عدا ϵ_k . وهذا يعنى ان الدالة الموجية التقريبية عند الازمنة t المتنايعة تعطى بالعلاقة :

$$\psi(t) = \psi_k^{(0)}(t) + \sum \epsilon_n(t) \psi_n^{(0)}(t) \quad (6.17)$$

وعلى ذلك لو أجريت عملية قياس تجريبى على المجموعة الفيزيائية فان احتمالية تواجدها في الحالة $\psi_l^{(0)}$ تكون عبارة عن :

$$P^l(t) = |\epsilon_l(t)|^2 \quad (6.18)$$

حيث

$$\epsilon_l(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \langle l | H^{(1)} | k \rangle e^{\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}} \quad (6.19)$$

وقبل إمكانية إجراء التكامل في (6.19) علينا ان نتصور ماذا حدث عند اللحظة t_0 والقرب منها عند بدء التجربة . ولكن نظرا لصعوبة هذا لعدم معرفتنا مسدى قرب هذا التصور من الواقع فان المعتاد للسهولة افتراض ان طاقة الاطلاق بدأ تأثيرها على المجموعة الفيزيائية عند الزمن " $t_1 = -\infty$ " تبعا للفرض التالي :

$$H^{(1)}(t) = e^{\alpha t} H_0^{(1)} \quad (6.20)$$

على افتراض ان α صغير . وفائدة ذلك الاختيار انها تضمن التخلص من اى متغيرات انتقالية لو وجدت . وباستخدام هذا الفرض نحصل على :

$$\epsilon_l(t) = -\frac{\langle l | H_0^{(1)} | k \rangle e^{\alpha t} e^{\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}}}{(E_l - E_k) - i\alpha\hbar}, \quad l \neq k \quad (6.21)$$

وعلى ذلك فان الاحتمالية $P^l(t)$:

$$P^l(t) = \frac{(\langle l | H_0^{(1)} | k \rangle)^2 e^{2\alpha t}}{(E_l - E_k)^2 + \alpha^2 \hbar^2} \quad (6.22)$$

وهي تعطينا الاحتمالية الكلية (Total Probability) بان المجموعة الفيزيائية - بداية من الزمن " $t_0 = -\infty$ " - انتقلت من الحالة الكمية k الى الحالة الكمية l عند زمن ما . وحيث ان ما يقاس بالتجربة هو معدل ازدياد هذه الاحتمالية (مثلا يقابل تزايد عدد الجسيمات الاولى المسجلة بالكاشف النوى) لذلك علينا ان نحسب " $\partial P^l(t) / \partial t$ " باستخدام معادلة (6.22) لنحصل على :

$$\frac{\partial P^l(t)}{\partial t} = \frac{2 \alpha \langle l | H_0^{(1)} | k \rangle^2 e^{2\alpha t}}{(E_l - E_k)^2 + \alpha^2 h^2} \quad (6.23)$$

ولو تذكرنا تعريف بعض خصائص دالة ديراك :

$$\delta(E_l - E_k) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{(E_l - E_k)^2 + \alpha^2}$$

$$6 \quad |\alpha(E_l - E_k)| = \frac{\delta(E_l - E_k)}{\alpha}$$

$$6 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(E_l - E_k) d(E_l - E_k) = 1$$

$$\frac{\partial P^l(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{h} |\langle l | H_0^{(1)} | k \rangle|^2 \delta(E_l - E_k) \quad (6.24)$$

هذا التعبير يطينا المعدل الزمني للاحتيالية التي نمنعها في جميع الانجاهات الممكة في الحيز المتاح . ولكن الوضع التجريبي في العمل حقيقة ان القياسات تتم في مدى محدود من الزوايا ومن الطاقة (بالنسبة للمثال الذي اشرنا اليه توتاً وهو الكاشف النووي فان مثل هذا الجهاز يضبط بالنسبة لمنح الجسيمات الاولى السالزم كنفها عند زاوية معينة ويسمح بكشف حزمة من تلك الجسيمات ذات مدى طاقة محدد) فاذا عبرنا عن ما يقيسه الجهاز بالجزء dN فيكون هذا مساوياً لحاصل ضرب " كثافة الحالات النهائية $M(E_l)$ " في " مدى الطاقة dE_l التي تقاس بالتجربة " اي أن :

$$dN = M(E_l) dE_l \quad (6.25)$$

وعلى ذلك تأخذ معادلة (6.24) الصورة التالية :

$$\frac{\partial P^l(t)}{\partial t} = \int \frac{2\pi}{h} \left| \langle l | \hat{H}_0 | k_0 \rangle \right|^2 \delta(E_l - E_k) \rho(E_l) d(E_l - E_k)$$

$$\therefore \frac{\partial P^l(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{h} \left| \langle l | \hat{H}_0^{(1)} | k \rangle \right|^2 \rho(E_l) \quad (6.26)$$

هذه المعادلة تُعرف باسم " القاعدة الذهبية " Golden Rule ، وتعتبر من أهم العلاقات الرياضية على الإطلاق في علم الفيزياء - على سبيل المثال هي العلاقة الاساسية لحساب ما يعرف بالمقطع المستعرض لاستطارة الجسيمات الأولية . وسوف يتضح لنا ذلك في الباب السابع باذن الله تعالى .

مثال (١-٦) :

إذا علمت ان جزئ مادة النوشادر (الامونيا Ammonia) يتكون من ذرة نيتروجين واحدة مرتبطة بثلاث ذرات ايدروجين مكونين ما يشبه الشكل الهرمسي باحتمالين احدهما ان تكون ذرة النيتروجين في مستوى اعلى من مستوى ذرات الايدروجين الثلاث والاخر ان تكون ذرة النيتروجين في مستوى اسفل من مستوى تلك الذرات . احسب الاحتمالية الكمية الخاصة بهما . والقيم الايجينية لهما .

الحل :

لتفرض ان هاتين الحالتين هما متجه الكت $|1\rangle$ ومتجه الكت $|2\rangle$ وهما تُعتبران الاتجاهات الايجينية للجزء الاكبر H_0 من الهاميلتونية الخاصة بهذه المجموعة الفيزيائية ، ولكن مزوجة هاتين الحالتين نتيجة التفاعل بينهما الذي يمثل بجزء صغير $\hat{H}^{(1)}$ من الهاميلتونية فان $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ لا تكونا متجهات ايجينية للهاملتونية الكلية $(\hat{H}_0 + \hat{V})$. فاذا كانت

$$\hat{H}_0 |1\rangle = E_0 |1\rangle, \quad \hat{H}_0 |2\rangle = E_0 |2\rangle, \quad \hat{H}_{11} = \hat{H}_{22} = E_0 \\ \hat{H}_{12} = \hat{H}_{21} = -\beta$$

حيث $H_{12} = \langle 1 | \hat{H}^{(1)} | 2 \rangle$ الخ...
فان بتطبيق العلاقة (6.15)

$$i \hbar \frac{\partial \epsilon_l(t)}{\partial t} = \langle l | \hat{H}^{(1)} | k \rangle e^{\frac{i(E_l - E_k)t}{\hbar}} \quad (6.15)$$

على المجموعة الفيزيائية التي تناقشها نجد ان

$$i \hbar \frac{\partial \epsilon_1(t)}{\partial t} = H_{11} \epsilon_1(t) + H_{12} \epsilon_2(t)$$

$$i \hbar \frac{\partial \epsilon_2(t)}{\partial t} = H_{22} \epsilon_2(t) + H_{21} \epsilon_1(t)$$

$$\therefore i \hbar \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} = E_0 \epsilon_1 - \beta \epsilon_2$$

$$i \hbar \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} = -\beta \epsilon_1 + E_0 \epsilon_2$$

$$\therefore i \hbar \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_1 + \epsilon_2] = (E_0 - \beta) (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_1 - \epsilon_2] = (E_0 + \beta) (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$\therefore [\epsilon_1 + \epsilon_2] = a e^{-\frac{i(E_0 - \beta)t}{\hbar}}$$

$$[\epsilon_1 - \epsilon_2] = b e^{+\frac{i(E_0 + \beta)t}{\hbar}}$$

حيث a و b ثابتان • وإذا فرض ان عند اللحظة $t = 0$ كانت المجموعة الفيزيائية في الحالة الكمية $|1\rangle$

$$\therefore \epsilon_1(t) = e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \cos \frac{\beta t}{\hbar}$$

$$6 \quad \epsilon_2(t) = i e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \sin \frac{\beta t}{\hbar}$$

$$\therefore |\epsilon_1(t)|^2 = |\epsilon_2(t)|^2$$

بعد ذلك نلاحظ ان صفوة الهاميلتونية عارة عن $\begin{pmatrix} E_0 & -\beta \\ -\beta & E_0 \end{pmatrix}$ وهذا معناه
 $(E_0 - \lambda)^2 - \beta^2 = 0$

$$\therefore \lambda = E_0 \pm \beta$$

ومن دراستنا في الباب الخامس نلاحظ ايضا ان :

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

$$6 \quad |\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle)$$

شال (٢-٦) :

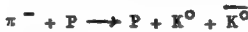
احسب الاحتمالية $|\epsilon_-(t)|^2$ انه يبدأ بالجسيم K^0 (عند $t = 0$)
 ينتج عند لحظة لاحقة " $t = t$ " الجسيم المضاد له \bar{K}^0 .

الحل :

من أساسيات فيزياء الجسيمات الأولية (Elementary Particle Physics) معلوم ان الميزون K^0 ينتج أثناء التفاعلات القوية (Strong Interactions) مثل التفاعل التالي بين ميزونات باي السالبة (π^- -meson) وهدف بروتوني :



حيث Λ هو جسيم الهايبرين المتعادل (Λ -Hyperon) . وعلى ذلك يمكن اعتبار K^0 حالة ايجينية للهاميلتونية الخاصة بمثل هذا التفاعل القوي ($|K^0\rangle$) . وبالمثل الميزون المضاد له \bar{K}^0 يمكن اعتباره حالة ايجينية للهاميلتونية الخاصة بقناة اخرى للتفاعل القوي نفسه يؤدي الى :



وعلى هذا فان $|K^0\rangle$ ، $|\bar{K}^0\rangle$ متجهات ايجينية للهاميلتونية التفاعل القوي \hat{H}_0 . من ناحية اخرى فانه في غياب هذه التفاعلات القوية فان هذه الميزونات تتآكل تلقائيا - بعضها يتميز بمتوسط عمر $(0.5 \times 10^{-8} \text{ sec.})$ والبعض الاخر يتميز بمتوسط عمر أقصر بكثير $(0.86 \times 10^{-10} \text{ sec.})$ وعادة يرمز لها K_{Long}^0 ، K_{Short}^0 على التوالي . حيث يمثلان الجمع الخطي للمتجهات الايجينية $|K^0\rangle$ و $|\bar{K}^0\rangle$ كما يلي (ينظر المفهوم الذي درسنه في الباب الخامس) :

$$K_{\text{Long}}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

$$K_{\text{Short}}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

وهذا التآكل الذي نشير اليه يحدث عن طريق تفاعل ضعيف (Weak Interaction) يتميز بهاميلتونية \hat{H}_W تمثل بجزء يسير للغاية بالمقارنة مع هاميلتونية التفاعل القوي \hat{H}_0 . ونتيجة تأثير \hat{H}_W فان $|K^0\rangle$ و $|\bar{K}^0\rangle$ لا تكونا حينئذ ايجينيتين

للهاميلتونية الكلية $(\hat{H}_0 + \hat{H}_W)$ - ولوانهما كذلك بالنسبة لهاميلتونية التفاعل القوي \hat{H}_0 • وقد وجد أن :

$$H_{11} = H_{22} = E_0 + C$$

$$H_{12} = H_{21} = C$$

حيث

$$2 C = \alpha - i \beta$$

ونستطيع التعبير عن سعة الاحتمالية لكل من الحالتين K^0 و \overline{K}^0 كما يلي :

$$\epsilon_+ = \langle K^0 | \psi \rangle , \quad \epsilon_- = \langle \overline{K}^0 | \psi \rangle$$

وباتباع نفس الأسلوب الذي استخدم في مثال (٢-٦) نحصل على :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\epsilon_+ + \epsilon_-| = (E_0 + 2 C)(\epsilon_+ + \epsilon_-)$$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\epsilon_+ - \epsilon_-| = E_0 (\epsilon_+ - \epsilon_-)$$

$$|K_{Long}^0\rangle = |K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\overline{K}^0\rangle)$$

$$|K_{Short}^0\rangle = |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\overline{K}^0\rangle)$$

حيث سمنا الاحتمالية المقابلة لكل من هاتين الحالتين هما $\epsilon_1(t)$ و $\epsilon_2(t)$ وإذا :

$$\epsilon_1(t) = \langle K_1^0 | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ + \epsilon_-)$$

$$\epsilon_2(t) = \langle K_2^0 | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_+ - \epsilon_-)$$

$$\therefore \epsilon_1(t) = \epsilon_1(0) e^{-\frac{i(E_0 + 2C)t}{\hbar}}$$

$$\epsilon_2(t) = \epsilon_2(0) e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}$$

وحيث أننا بدأنا بالجسيم K^0 فمعنى ذلك $\epsilon_+(0) = 1$ ، $\epsilon_-(0) = 0$

$$\therefore \epsilon_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\left[\frac{\beta + i(\alpha + E_0)}{\hbar} \right] \cdot t}$$

$$\epsilon_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}$$

وهنا نلاحظ ان :

$$|\epsilon_1(t)|^2 \sim e^{-\frac{2\beta t}{\hbar}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\therefore \tau \sim \frac{\hbar}{2\beta}$$

مثال (٢-٦) :

اشح مفهوم ظاهرة موسبار (Mössbauer Effect) في اطار نظرية الانتقال .

الحل :

تتميز ظاهرة موسبار بان داخل بلورة ما يحدث ان احد ائنية ذراتها (سواء شعة) يصدر اشعاعا (فوتون) فترتد البلورة كوحدة متكاملة وليست النواة المشعة بمفردها ولما كانت كتلة البلورة ($M_{crystal}$) كبيرة جدا (خلاف كتلة اى ذرة مفردة)

فان طاقة ارتدادها كوحدة تصبح صغيرة للغاية بحيث عليا يكون الفوتون الناتج من تخلص البلورة من اضطرابها له طاقة مساوية لطاقة الفوتون الاصلى الصادر من التسواه الشعبة .

معنى ذلك ان الوضع الفيزيائى لظاهرة موسبارو ممكن تحيله يتعرض مجموعة فيزيائية وهى البلورة لدفع (Impulse) يتمثل فى الفوتون الصادر من التواء الشعبة بتردد معين يؤثر على البلورة وهى فى حالتها الارضية فتنتقل الى حالة اضطراب ضمن أنماطها التذبذبية ثم يتم صدور فوتون جديد نتيجة عودة البلورة من حالة الاضطراب الى حالتها الارضية مرة اخرى . وعلى ذلك يمكننا التعبير عن الحالة الموجية للبلورة بمعادلة شرودنجر على النحو التالى :

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{K} + \hat{V} + \hat{I}]$$

حيث \hat{K} طاقة الحركة (Kinetic Energy) بدون الدفع .

\hat{V} طاقة الوضع (Potential Energy) بدون الدفع .

\hat{I} طاقة الدفع (Impulse Energy) بمعنى ان القوة F

الناتجة من الفوتون الصادر من التواء الشعبة عبارة عن $F(t) = - \frac{\partial I}{\partial x}$ حيث للسهولة نتحدث بالنسبة لاتجاه خطى x مفرد . اى ان :

$$I = - F \cdot x = - P \cdot x \delta(t) , \quad I_{x=0} = 0$$

وحيث انه يمكننا خلال عملية الدفع اهمال كل من طاقة الحركة وطاقة الوضع بالنسبة للدفع نفسه اذاً تصبح معادلة شرودنجر على النحو التالى :

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = I(x, t) \psi$$

$$\therefore i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = - P \cdot x \delta(t) \psi$$

وباجراء التكامل نضع $\psi_i = \psi$ عند " $t = 0$ " وعند " $t = t$ "

$$\therefore i \hbar \left[\ln \psi_f - \ln \psi_i \right] = -P \cdot x$$

$$\therefore \psi_f(x) = \psi_i(x) e^{\frac{iP \cdot x}{\hbar}}$$

مع ملاحظة ان تلك الطاقة الكلية النهائية للهورة $\psi_f(x)$ ليست احد المتجهات الايجينية لتلك المجموعة الفيزيائية . ولكن يمكننا التعبير عنها بدلالة المتجهات الايجينية $\psi_n(x)$ مع الاستفادة بما تتميز به $\psi_n(x)$ من خاصية المعايمة والتعامدية

$$\therefore \psi_f(x) = \psi_i(x) e^{\frac{iP \cdot x}{\hbar}} = \sum_n \epsilon_n \psi_n(x)$$

$$\therefore |\epsilon_n|^2 = \int \psi_n^*(x) \psi_n(x) e^{\frac{iP \cdot x}{\hbar}} dx$$

وبفرض ان الهورة عبارة عن متذبذب توافقي خطي واصلا في حالة الارضية بمعنى :

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} a} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

حيث a تقابل السعة الكلاسيكية للمتذبذب .

وعلى هذا فان الاحتمالية $|\epsilon_1|^2$:

$$|\epsilon_1|^2 = e^{-\frac{p^2 a^2}{\hbar^2}} = e^{-k^2 a^2}$$

حيث " $k = \frac{p}{\hbar}$ " وهو العدد الموجي .

وكتطبيق هام لاساسيات نظرية الاطلاق مع تغير الزمن لندرس :

التفاعل المتبادل للمادة في أصغر صورها (الالكترن - الذرة - ٠٠٠) مع الاشعاع

الكهرومغناطيسى :

لنتصور ان مجموعة فيزيائية في أبسط صورها مثل الكترن مضطرب في ذرته الام • حيث يشاهد أن خلال فترة زمنية في المتوسط حوالى 10^{-10} من الثانية تُشع هذه الذرة فوتون في اتجاه ما - أو على عكس ذلك ذرة في حالتها الارضية تحت ظروف مناسبة يتم لها ان تمتص فوتون بواسطة احد الكترونات و نتيجة ذلك تصبح الذرة ككل في حالة مضطربة (Excited State) • ونود الان تطبيق اساسيات نظرية الاطلاق التى اشرنا اليها لان في هذا الباب يفرض ان نحصل على :

- سعة احتمالية انتقال المجموعة الفيزيائية من حالتها الابتدائية الى النهائية •
- متوسط عمر الحالات المضطربة •
- معدل انبعاث الطاقة الاشعاعية والتوزيع الاتجاهى لها •
- قواعد الاختيار (Selection Rules) التى يتم على اساسها الانتقال من حالة الى اخرى • على فرض ان سلوك المجموعة يشابه سلوك المتذبذب التوافقى •

ونبدأ بالاشارة الى ان اساسيات الكهروديناميكا توضح ان اهم مميزات الاشعاع الكهرومغناطيسى تنفع من علاقات ماكسويل التالية حيث نستخدم الرموز التى تحمّل المعنى المعتاد لها (راجع مثال معادله (٦-٤) صفحة ١١١) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu \vec{j}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

$$\vec{E} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

وفى ضوء ذلك فإن المجموعة الفيزيائية التي تشمل على الكيون واسمــــــــــــــــاع
كبرومغناطيسى تتميز بهاميلتونية عارة عن :

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV \\ &= \frac{1}{2m} \left[p^2 - e\vec{p} \cdot \vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p} + e^2 A^2 \right] + eV \\ &= \frac{1}{2m} \left[p^2 - e\vec{p} \cdot \vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{p} + 0 \right] + eV \\ &= \frac{1}{2m} \left[p^2 + eV \right] + \left[-\frac{e}{2m} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) \right] \\ &= \hat{H}(0) + \hat{H}(1) \quad (6.28)\end{aligned}$$

فإذا قمنا ان نتيجة تفاعل التذبذب مع الامعاء يحدث انتقال للتذبذب من
الحالة $|k\rangle$ الى الحالة $|l\rangle$ فعنى ذلك ان عنصر المصفوفة الذى يمثل
التفاعل انذى يربط بين هاتين الحالتين هو :

$$\begin{aligned}\langle l | \hat{H}(1) | k \rangle &= -\frac{e}{2m} \int \psi_l^* \left[\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} \right] \psi_k d\tau \\ &= -\frac{e}{2m} \int \left[\psi_l^* \vec{p} \cdot \vec{A} \psi_k + \psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k \right] d\tau\end{aligned} \quad (6.29)$$

وبافتراض ان " $\text{div } \vec{A} = 0$ " اذا الحد الاول من الطرف الايمن من هـــــــــذه
المعادلة يصبح :

$$\begin{aligned}
 \psi_l^* [\vec{p} \cdot \vec{A} \psi_k] &= \psi_l^* [-i\hbar \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \psi_k)] \\
 &= \psi_l^* [-i\hbar \{ (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \psi_k + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \psi_k) \}] \\
 &= \psi_l^* [-i\hbar \{ 0 + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \psi_k) \}] \\
 &= \psi_l^* [\vec{A} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} \psi_k)] \\
 &= \psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \langle l | \hat{H}^{(1)} | k \rangle &= -\frac{e}{2m} \int [\psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k + \psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k] d\tau \\
 &= -\frac{e}{m} \int \psi_l^* \vec{A} \cdot \vec{p} \psi_k d\tau \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

أو بالمقابلة :

$$\langle l | \hat{H}^{(1)} | k \rangle = -\frac{e}{m} \int \psi_l^* \vec{p} \cdot \vec{A} \psi_k d\tau \quad (6.32)$$

هاتان المعادلتان (6.31) و (6.32) يمكننا فهمهما بدلالة الهادي
 المامة لميكانيكا الكم في ضوء أن عنصر المصفوفة $\langle l | \hat{H}^{(1)} | k \rangle$ يمتص
 عموماً ما يلي :

$$\langle \text{الحالة الابتدائية} | \text{المامة} | \text{الحالة النهائية} \rangle$$

وعلى ذلك معادلة (6.31) يمكن فهمها على أنها تختص بمجموعة باعثة للاشعاع
 إذ تعتبر " ψ_k " هي الحالة الابتدائية التي تشتمل على الإلكترون (أو الفوتون)

أو التذبذب التوافقي (٠٠٠) وهو في حالة كمية مضطربة • وتأثير المعاملة " \hat{p} " على هذه الحالة " ψ_k " ينسب في انتقال الالكترون الى الحالة " ψ_p " مصحوبا بانطلاق فوتون منه • اى ان الحالة النهائية تشتمل على الكترون (ودالته الموجية ψ_p) وفوتون (ودالته الموجية \hat{A}) •

وعلى العكس معادلة (6.32) يمكن فهمها على انها تختص بامتصاص الاشعاع الكهرومغناطيسى اذ نعتبر " $\psi_k \hat{A}$ " هي الحالة الابتدائية التى تشتمل على " الكترون وفوتون " (حيث ψ_k جزء الدالة الموجية الذى يخص الالكترون ، \hat{A} جزء الدالة الموجية الذى يخص الفوتون) • ونتيجة تأثير المعاملة " \hat{p} " على هذه الحالة " $\psi_k \hat{A}$ " يتم التقاط الفوتون بواسطة الالكترون اى يتم امتصاص الاشعاع والانتقال الى الحالة النهائية " ψ_p " التى لايتواجد فيها اى فوتون • ولتمييز هاذين الوضعين يمكننا كتابة عنصر المصفوفة فى معادلة (6.31) فى حالة انهماء الفوتون بالصورة التالية : " $\langle \vec{k} | H^{(1)} | \vec{k} \rangle$ " - بينما فى حالة امتصاص الفوتون " $\langle \vec{k} | H^{(1)} | \vec{l} \rangle$ • وكما هو موضح بهاتين المعادلتين فان هاذين المنصرين متساويان •

وقبل محاولة استكمال المعالجة الرياضية لهذه المسألة التى ندرسها علينا تحديد الحالة الكمية للفوتون " \hat{A} " حيث فى المعتاد يعطى تردد الاشعاع واتجاه انطلاقه ومعنى ذلك وجوب تشيله بسوجه مستوية على النحو المائل لىابلى :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{1}_A \cdot N \cdot \cos 2\pi \left(\frac{\vec{r}}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ &= \vec{1}_A \cdot N \cdot \cos (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \end{aligned} \quad (6.33)$$

وفيه $\vec{1}_A$ يرمز لوحدة المتجهات فى الاتجاه الخاص بالمتجه \hat{A} •
بينما N ثابت معايرة (Normalization constant) يقابل سعة الازاحة
المصاحبة لموجة الاشعاع •

k متجه " العدد الموجي " في اتجاه انطلاق الاشعاع (ونلاحظ هنا
 • أن $\text{div } A = 0$ " يعنى ان $\vec{1}_A \cdot \vec{k} = 0$ "
 ω التردد الزاوى للاشعاع $kc = \omega$ حيث c سرعة الضوء وهى كما
 • نعلم تحقق المعادلة $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

ونلاحظ ان معادلة (6.33) تعنى ان موضع الفوتون غير محدد بالوة • بينما
 نستطيع تحديد كثافة الطاقة الاشعاعية \bar{G} الموثقة به وهى :

$$\bar{G} = \epsilon_0 \left(-\frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 = \frac{k^2 N^2}{\mu_0} \cos^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (6.34)$$

ومعنى ذلك ان متوسط تلك الكثافة \bar{G} - فى الحيز هو

$$\bar{G} = \frac{k^2 N^2}{\mu_0} \sqrt{\cos^2 (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \frac{k^2 N^2}{2 \mu_0} \quad (6.35)$$

وانا افترض ان الحالة الابتدائية تشتمل على فوتون واحد وان حجم الحيز المساح Ω'

$$\therefore \bar{G} = \frac{\hbar \omega}{\Omega'} = \frac{\hbar kc}{\Omega'} = \frac{k^2 N^2}{2 \mu_0} \quad (6.36)$$

وبذلك يمكننا التعويض عن ثابت المعايرة N كما يلى :

$$N = \sqrt{\frac{2 \mu_0 c \hbar}{\hbar \omega \Omega'}} = \sqrt{\frac{2 \hbar}{\epsilon_0 \omega \Omega'}} \quad (6.37)$$

$$\therefore \vec{A} = \sqrt{\frac{2 \hbar}{\epsilon_0 \omega}} \cdot \vec{1}_A \cdot \cos (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (6.38)$$

وانا عبرنا عن $\cos (\dots)$ بدلالة $e^{i(\dots)}$:

$$\therefore \vec{A} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \hbar}{\epsilon_0 \omega}} \cdot \vec{1}_A \cdot \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad (6.39)$$

والتعويض عن متجه الجهد \vec{A} بهذه النتيجة في معادلة عنصر المصفوفة

نحصل على :

$$\begin{aligned} \langle l | \hat{H}^{(1)} | k \rangle &= -\frac{e}{m} \int \psi_l^* \vec{p} \cdot \vec{A} \psi_k d\tau \\ &= \frac{-e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2 \epsilon_0 \omega}} \cdot \vec{1}_A \left\{ \langle l | e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} | k \rangle e^{-i\omega t} + \langle l | e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | k \rangle e^{i\omega t} \right\} \quad (6.40) \end{aligned}$$

وحيث ان هاميلتونية التفاعل (هاميلتونية الاقلاق) $\hat{H}^{(1)}$ " تتميز هنا بانها دورية في الزمن (بتردد زاوى ω) هذا يعنى ان الحد الذى يشمل $\exp(-i\omega t)$ " يقابل اكتساب المجموعة لطاقة أى أن الفوتون حدث له امتصاص بينما الحد الذى يشمل $\exp(i\omega t)$ " يقابل تفديها لطاقة أى انهمسات فوتون . اذا نستطيع ان نعبر عن عنصر المصفوفة المتقابلة لانبعثات الفوتون كما يلى :

$$\langle k | \hat{H}^{(1)} | l \rangle = -\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \langle l | \vec{1}_A \cdot \vec{p} \cdot e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} | k \rangle \quad (6.41)$$

بينما عنصر المصفوفة المتقابلة لامتصاص الفوتون هو :

$$\langle l | \hat{H}^{(1)} | k \rangle = -\sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega}} \langle l | \vec{1}_A \cdot \vec{p} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} | k \rangle \quad (6.42)$$

وفى حالة ما اذا كان الطول الموجى λ للاشعاع اكبر بكثير من قطرة الذرة (مثلا اذا كان $\lambda = 10^{-7} \text{ m}$ بينما $k \sim 10^{-10} \text{ m}$ اذا $k \cdot \vec{r} \sim 10^{-3}$) فان $\exp(\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}) \sim 1$ " ومعنى ذلك ان عنصرى مصفوفة التفاعل تكونان متساويين فى المعادلتين (6.41) و (6.42) . ويصبح حساب اى ضيق سهلا نسبيا . فاذا ما تذكرنا ان :

$$p = \frac{m}{i\hbar} \left[r, H^{(0)} \right] = \frac{m}{i\hbar} (x H^{(0)} - H^{(0)} x) \quad (6.43)$$

ورأينا عالى ان :

$$\begin{aligned} \langle \ell | \hat{H}^{(1)} | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k} | \hat{H}^{(1)} | \ell \rangle = -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}} \langle \ell | \vec{1}_A \cdot \vec{p} | \vec{k} \rangle \\ &= -\frac{e}{m} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}} \cdot \vec{1}_A \cdot \langle \ell | \vec{p} | \vec{k} \rangle \quad (6.44) \end{aligned}$$

وباستخدام (6.43) وملاحظة أن $|\ell\rangle, |\vec{k}\rangle$ حالات ايجينو
للهامiltonية $\hat{H}^{(0)}$ نجد ان :

$$\begin{aligned} \langle \ell | \hat{p} | \vec{k} \rangle &= \frac{m}{i\hbar} \langle \ell | \vec{r} \hat{H}^{(0)} - \hat{H}^{(0)} \vec{r} | \vec{k} \rangle \\ &= \frac{m}{i\hbar} \left[E_k \langle \ell | \vec{r} | \vec{k} \rangle - E_\ell \langle \ell | \vec{r} | \vec{k} \rangle \right] \\ &= \frac{m}{i\hbar} (E_k - E_\ell) \langle \ell | \vec{r} | \vec{k} \rangle \\ &= \frac{im}{\hbar} (E_\ell - E_k) \langle \ell | \vec{r} | \vec{k} \rangle \\ &= im \cdot \frac{E_\ell - E_k}{\hbar} \cdot \langle \ell | \vec{r} | \vec{k} \rangle \quad (6.45) \end{aligned}$$

وبوضع " $\omega_{\ell k} = (E_\ell - E_k) / \hbar$ "

$$\therefore \langle \ell | \hat{p} | \vec{k} \rangle = \pm im \omega_{\ell k} \langle \ell | \vec{r} | \vec{k} \rangle \quad (6.46)$$

حيث العلامة + نستخدم في حالة امتصاص الاشعاع $(E_\ell > E_k)$

$$\begin{aligned} \therefore \langle \ell | \hat{H}^{(1)} | \vec{k} \rangle &= \langle \vec{k} | \hat{H}^{(1)} | \ell \rangle \\ &= \pm \frac{ie}{m} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}} \cdot m \omega_{\ell k} \cdot \vec{1}_A \cdot \langle \ell | \vec{r} | \vec{k} \rangle \quad (6.47) \end{aligned}$$

والان نستطيع حساب معدل اشعاع " الزدوج الكهربى (Electric Dipole Radiation) تبعاً للتقريب الموضح بمعادلة (6.47) - هذا الاسم يضاف للاشعاع الحالى بسبب ان $\langle er \rangle$ تمثل كما هو معروف فى اساسيات علم الكهروديناميك " عزم الزدوج الكهربى " . ولاتمام ذلك نبدأ من علاقة القاعدة الذهبية التى توضحها معادلة (6.26) :

$$\frac{\partial P^l(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar} k \langle l | H^{(1)} | k \rangle^2 \rho(E) \quad (6.26)$$

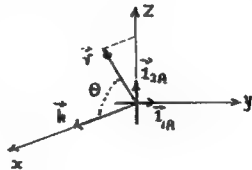
وفى هذا كثافة الحالات النهائية عبارة عن :

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp} \frac{dp}{dE} = \frac{\Omega' \cdot p^2 \cdot d}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\Omega' E^2}{(2\pi\hbar c)^3} d\Omega \quad (6.48)$$

حيث $d\Omega$ عنصر الزاوية الموجهة المتجهة خلالها (فى اتجاه \vec{k}) الحالات التى يتم تحديد عددها (كل فوتون يقابل واحدة من الحالات لان اتجاه الفوتون يعاكس تماماً اتجاه ارتداد المتذبذب) $"E = \hbar\omega"$

$$\therefore \frac{\partial P^l(t)}{\partial t} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2 \Omega'}{2\pi\hbar c^3} \langle l | \vec{r}_A \cdot \vec{r} | k \rangle^2 d\Omega \quad (6.49)$$

" الشكل يوضح العلاقة بين المتجه \vec{r} والمتجه \vec{k} كذلك بين اتجاهى استقطاب الاشعاع الكهربى \vec{r}_A و \vec{r}_{2A} " \vec{r}_A و \vec{r}_{1A}



والان لحساب غير الانتقال الاعمالى τ_{lk} من k الى l يجب ان نقوم بعملية جمع على الحالات المستقلة للاستقطاب \vec{r}_{1A} و \vec{r}_{2A} ونجرب عملية التكامل على كل الاتجاهات (ولهذا الغرض يفرض ان الاتجاهات \vec{k} و \vec{r}_{1A} و \vec{r}_{2A}

" ثابتة " • ولدينا :

$$\langle l | \vec{l}_A \cdot \vec{r} | k \rangle = \vec{l}_A \cdot \langle l | \vec{r} | k \rangle = \vec{l}_A \cdot \vec{M} \quad (6.50)$$

ويكون المجموع الذي نهنيه بالنسبة لاتجاهى الاستقطاب هو (مع ملاحظة ان اتجاه \vec{k} اختياري وقد اعتبرناه موازيا للمحور x) :

$$\begin{aligned} \sum |\vec{l}_A \cdot \vec{M}|^2 &= |\vec{l}_A \cdot \vec{M}|^2 + |\vec{l}_A \cdot \vec{M}|^2 = |M_y|^2 + |M_z|^2 \\ &= |M_y|^2 + |M_z|^2 + |M_x|^2 - |M_x|^2 \\ &= |M|^2 - \frac{|\vec{k} \cdot \vec{M}|^2}{k^2} = |M|^2 - \frac{k^2 |M|^2 \cos^2 \theta}{k^2} \\ &= |M|^2 \sin^2 \theta \quad (6.51) \end{aligned}$$

$$\therefore \sum |\langle l | \vec{l}_A \cdot \vec{r} | k \rangle|^2 = |\langle l | \vec{r} | k \rangle|^2 \sin^2 \theta \quad (6.52)$$

(وهنا نشير الى ان :

$$\begin{aligned} |\langle l | \vec{r} | k \rangle|^2 &= |\langle l | x | k \rangle|^2 + |\langle l | y | k \rangle|^2 + |\langle l | z | k \rangle|^2 \\ \therefore \frac{\partial P^l(\omega)}{\partial t} &= \frac{e^2 \omega^3}{8\pi^2 \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle l | \vec{r} | k \rangle|^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (6.53) \end{aligned}$$

وباجراء التكامل على كل الزوايا نحصل على احتمالية الانتقال الكلية في وحدة الزمن :

$$P = \frac{e^2 \omega^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle l | \vec{r} | k \rangle|^2 \quad (6.54)$$

والان نشير الى انه اذا افترضنا ان المجموعة اساسا موجودة في حالة مضطربة

" k " فانه بعد مرور فترة زمنية وجيزة فان احتمالية " $P_k(t)$ " انها لانحزال

موجودة تنقص عن قيمة الوحدة التي كانت عليها عند البداية • واحتمالية انها تتأكس
بديهي انها تتناسب طرديا مع " $P_k(t)$ " ونعبر عن ذلك كما يلي :

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = -P \cdot P_k \quad (6.55)$$

$$\therefore P_k(t) = P_k(0) \cdot e^{-P \cdot t} \quad (6.56)$$

ومن هذه المعادلات يتضح لنا أن P تمثل ثابت التآكل للحالة الكمية $|k\rangle$

• $\frac{e^2 \omega^3 \langle l | r | k \rangle^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} =$ " تمثل ثابت التآكل للحالة المضطربة •
• ويكون مقلوب هذه الكمية عبارة عن مقياس لعمر تأكلها $\tau_{l,k}$ •

قواعد الاختيار عند الانتقال من حالة الى اخرى بالنسبة لتفاعل التذبذب مع الاشعاع :

كما اشرنا في الشكل السابق لنفرض أن التذبذب يتحرك في اتجاه المحور x
• $\langle l | x | k \rangle^2$ يختزل الى $\langle l | x | k \rangle^2$ وعليه نبدل من
• $\langle l | x | k \rangle^2$ الى $\langle l | x | k \rangle^2$ (راجع صفحة - ٤ - معادلة (1.14)) :

$$\langle l | x | k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^* x \psi_k dx = x_{l,k}$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$$

$$\therefore x_{l,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l \left\{ \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \psi_k \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l (a\psi_k + \bar{a}\psi_k) dx \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l (\sqrt{k}\psi_{k-1} + \sqrt{k+1}\psi_{k+1}) dx \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \{ \sqrt{k} \delta_{l,k-1} + \sqrt{k+1} \delta_{l,k+1} \} \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

وهذه النتيجة تعطينا قاعدة الاختيار في الانتقالات الخاصة بالتذبذب التوافقي (الذرات الضوئية) إذ أن الطرف الايمن من المعادلة يصبح صفرا الا اذا كان $l = k \pm 1$. أى ان انبعاث الاشعاع يستدعى :

$$\Delta l = -1$$

بينما امتصاص الاشعاع يستدعى :

$$\Delta l = +1$$

بمعنى ان هذه الانتقالات المسموح بها هي تلك التى يتغير فيها عدد الكم بمقدار الوحدة .

مثال محلول (٦-٤) :

استنتج التعبير الرياضى للهاميلتونية التى تتأصل حركة الكترون (بسرعة \vec{v})
فى مجال مغناطيسى شدة فيضه \vec{B} • بجانب مجال كهبرى •

الحل :

نتذكر من اساميات الكهرومغناطيسية ان مثل هذه الصفحة • تتأثر بقوة
لورنتز \vec{F} حيث :

$$\vec{F} = e \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right]$$

وكالمعتاد \vec{E} عبارة عن متجه شدة المجال الكهبرى • والمتجهان \vec{E} و \vec{B}
تحققان علاقات ماكسويل الكهروديناميكية :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

والمعادلة الاولى منها يمكن التعبير عنها بدلالة ما يعرف بمتجه الجهد " \vec{A} " حيث
على النحو التالى : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

واذا رمزنا للمجموع $\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ بالرمز $\vec{\phi}$ حيث $\vec{\phi}$ يسمى بالجهد
القياسى أى ان :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

يمكننا كتابة معادلة لورنتز بالصورة التالية :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = e \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + (\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})$$

ولكن من قوانين تحليل المتجهات معروف ان :

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{A})_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z})$$

$$\therefore F_x = m \frac{d v_x}{dt} = -e \frac{d\phi}{dx} - e \frac{dA_x}{dt} + e \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$\hookrightarrow F_y = m \frac{d v_y}{dt} = -e \frac{d\phi}{dy} - e \frac{dA_y}{dt} + e \frac{\partial}{\partial y} (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$\hookrightarrow F_z = m \frac{d v_z}{dt} = -e \frac{d\phi}{dz} - e \frac{dA_z}{dt} + e \frac{\partial}{\partial z} (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

اي ان معادلة " \vec{F} " تصبح بالصورة :

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v} + e\vec{A}) = \vec{\nabla} \left[-e\phi + e (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right]$$

وبوضع المعادلات التالية على صورة اللاجرانجيان L (حيث " $q_3 = z$ " و

" $q_1 = x$ و " $q_2 = y$) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j / \partial t} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\therefore L = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} - e \phi + e \vec{A} \cdot \vec{v}$$

$$\therefore p_x = \frac{\partial L}{\partial v_x / \partial t} = m v_x + e A_x$$

$$\therefore H = \vec{p} \cdot \vec{v} + L$$

$$\begin{aligned} &= p \cdot \left[\frac{1}{m} (\vec{p} - e \vec{A}) - \frac{1}{2} m \frac{1}{m} (\vec{p} - e \vec{A})^2 \right. \\ &\quad \left. + e \phi - e \vec{A} \cdot \frac{1}{m} (\vec{p} - e \vec{A}) \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - e \vec{A} \right]^2 + e \phi \end{aligned}$$

(وهي نفس العلاقة التي بدأنا بها دراسة موضوع تفاعل الاشعاع مع الذرة او الالكترون
كتذبذب توافقى) اى ان الهاملتونية التي تقابل حركة الكترون تحت تأثير مجال
كهربي \vec{E} ومجال مغناطيسى \vec{B} هي :

$$H = \frac{1}{2m} \left[-i \hbar \nabla - e \vec{A} \right]^2 + e \phi$$

حيث مفترض ان v صغيرة بدرجة ملحوظة بالنسبة لسرعة الضوء c .

مثال محلول (٦-٥) :

جسيم كتلته m وشحنه الكهربى e يتميز بحركة مدارية تقابل عدد
الكم l وحركة مغزلية تقابل عدد الكم s استنتج التعبير الخارج بالمعزم
المغناطيسى μ الناتج من تقارن الحركتين المرتبطتين بالمعددين l و s .

مثال محلول (٦-٦) :

استنتج التعبير الخاص بهاملتونية تقارن الحركة المغزلية S للالكترون مع حركته المدارية L .

الحل :

رأينا خلال دراستنا الحالية (راجع صفحة - ٥٧ -) أن الحركة المغزلية للجسيمات الأولية هي عموماً نتيجة مرتبطة ارتباطاً طبيعياً بأساسيات النظرية النسبية الخاصة لاينشتين . كذلك من نتائج هذه النظرية أن أى جسيم له شحنة كهربائية e يتحرك بسرعة مدارية \vec{v} فى مجال كهربي \vec{E} يتأثر بمجال مغناطيسى مكافئ \vec{B}_{rel} عبارة عن (وفى حالة الالكترون $-e$) :

$$\vec{B}_{rel} = - \vec{v} \times \vec{E}$$

وبالتالى فإن العزم المغناطيسى $\vec{\mu}_s$ المرتبط بالحركة المغزلية للالكترون يتفاعل مع المجال المغناطيسى هذا حيث تمثل طاقة هذا التفاعل بهاملتونية \hat{H}_{SO} التزاوج بين حركة الالكترون المدارية وحركته المغزلية :

$$\hat{H}_{SO} = \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_{rel} = \left(\frac{e}{2m} \vec{S} \right) \cdot \left(\frac{\vec{p}}{m} \times \vec{E} \right)$$

$$= \frac{e}{2m^2} \vec{S} \cdot (\vec{p} \times \vec{E})$$

وبما ان :

$$e\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\vec{r} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right)$$

ومع تذكر ان الحركة المدارية تتميز بالعلاقة " $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ "

$$\therefore \hat{H}_{SO} = \left(\frac{1}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \vec{L} \cdot \vec{S}$$

وهو التعبير الخاص بهاملتونية تقارن الحركة المغزلية للالكترون مع حركته المدارية . وهو شائع الاستخدام فى تحليل المشاهدات الخاصة بالأغنياف الذرية .

وكذلك في تطبيقات النموذج التورى الضوى لتفسير الشاهدات التجريبية الخاصة

• بالتفاعلات النووية للجسيمات الأولية

مثال محلول (٧-٦) :

إذا فرض أن $\hat{H}_{spin} = -g e \vec{S} \cdot \vec{B}(t) / 2 mc$ هي الهاملتونية الخاصة بالكرون يتحرك في مجال مغناطيسى منتظم $\vec{B}(t)$ مع إهمال أى حركة مدارية له - وأن $\vec{B}(t)$ فى اتجاه محور \vec{z} تتميز بأنها منتظمة ولا تعتمد على الزمن . اثبت ان متجه الحركة الفضلية يدور حول المحور \vec{z} بسرعة زاوية ω عبارة عن

$$\omega = g e B_0 / 2 mc$$

الحل :

نبدأ لما درسناء فى الباب الاول وتطبيق معادلة الحركة لهايزنبرج فان :

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{d S_i}{dt} &= [S_i(t), \hat{H}_{spin}(t)] \\ &= - \frac{g e}{2 mc} \sum [S_i(t), S_j(t)] B_j(t) \end{aligned}$$

أى ان :

$$\frac{d S_x}{dt} = \frac{g e}{2 mc} [\vec{S} \times \vec{z}(t)]_x$$

وعموماً :

$$\frac{d \vec{S}}{dt} = \frac{g e}{2 mc} [\vec{S} \times \vec{B}(t)] = \vec{\mu}_{spin} \times \vec{B}(t)$$

وحيث ان \vec{B} فى اتجاه محور \vec{z} منتظمة فبما ولا تعتمد على الزمن :

$$\therefore \vec{B} = B_0 \vec{z}$$

$$\therefore \frac{d S_x}{dt} = \frac{g e B_0}{2 mc} S_y(t)$$

$$\frac{d S_y}{dt} = - \frac{g e B_0}{2 m c} S_x(t)$$

$$\frac{d S_z}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 S_x}{dt^2} + \omega_0^2 S_x = 0$$

$$\frac{d^2 S_y}{dt^2} + \omega_0^2 S_y = 0$$

حيث $\omega_0 = g e B_0 / 2 m c$ وحلول تلك المعادلات التفاضلية هي :

$$S_x(t) = S_x(0) \cos \omega_0 t + S_y(0) \sin \omega_0 t$$

$$S_y(t) = -S_x(0) \sin \omega_0 t + S_y(0) \cos \omega_0 t$$

$$S_z(t) = S_z(0)$$

فإذا فرض أن عند $t = 0$ كان متجه الحركة المغزلية في اتجاه محور x أى أن الإلكترون عند تلك اللحظة كان في حالة ايجينية S_x متسوية لقيمة ايجينية $+\frac{1}{2} \hbar$ أى أن القيم المتوقعة لمركبات S عند اللحظة $t = 0$ هي :

$$\langle S_x(0) \rangle = \frac{1}{2} \hbar$$

$$\langle S_y(0) \rangle = 0$$

$$\langle S_z(0) \rangle = 0$$

وعند اللحظة $t = t$ هي :

$$S_x(t) = \frac{1}{2} \hbar \cos \omega_0 t$$

$$S_y(t) = -\frac{1}{2} \hbar \sin \omega_0 t$$

$$S_z(t) = 0$$

وتوضح المعادلات ان تلك القيم المتوقعة للحركة المغزلية تدور • علاوة على ذلك فان الحالة الكمية الخاصة بالحركة المغزلية تتطور مع الزمن كما يلي :

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\omega_0 t S_z} |\psi(0)\rangle$$

• اي ان متجه الحركة المغزلية يدور حول محور S_z بسرعة زاوية ω_0

الباب السابع

معالجة ظاهرة الاستطارة في اطار ميكانيكا الكم دون ذكر
لتفسير الزمن

"Quantum Mechanical Treatment of the Scattering Problem
Without Time Consideration"

نجد تعرض اثنين (أو أكثر) من الجسيمات الى قوة تبادلية (mutual force) يكون في استطاعتها التصادم مع بعضها . وبهذا المفهوم فان هذا التصادم يؤدي الى ان التفاعل بينهما يؤثر على سرعة كل من الجسيمين مقداراً او اتجاههما او كليهما معا ورمط في كثير من الاحيان على التركيب الداخلي لكل منهما .

هذه الظاهرة هي ما يقصد به مفهوم الاستطارة ولقد أدت الى إثراء فهمنا لبعض خصائص المادة والطاقة فعلى سبيل المثال :

- استطارة الاشعاع الصوتي أثناء مروره في المواد المتباينة لان السبب في التعرف على حقيقة ان الاشعاع الصوتي جزء من الطيف الكامل للاشعاع الكهرومغناطيسي وانه يتميز بخاصيته الموجية المستعرضة . بجانب ما تم التعرف عليه من حقيقة انه يتميز في نفس الوقت بالخاصية الجسيمية كما اثبت ذلك استطارة الاشعة السينية (كجزء آخر من نفس الطيف الكهرومغناطيسي) بواسطة الالكترونات المهمل ترابطها مع ذراتها الأم .

- استطارة الاشعاعات السينية بواسطة بلورات المواد الجامدة أدت الى فهم العديد من خصائص التركيب البلوري لكثير من تلك المواد .

- استظارة الاشعاعات الالكترونية ودراسة ما يعرف بالمقطع المستعرض لالتقاط تلك الاشعاعات بواسطة الأغشية الرقيقة من المواد الجامدة اشباه الموصلات كان لها الأثر الكبير في تطوير تصنيع الدوائر المتكاملة - "IC" (Integrated Circuits) الخاصة بتكنولوجيا الحاسبات حتى تتسع لتخزين ملايين المعلومات على نفس الدائرة الواحدة . كذلك فان مثل هذه الدراسات أدت الى اختراع الميكروسكوب النفقي القادر على توضيح التركيب السطحي للمواد الجامدة (تم هذا الاختراع عام ١٩٨٦ بواسطة بينج ورد هير) .

- استظارة الاشعاعات النوية على اختلاف طبيعتها (بروتونية • نيوترونية • ميزونية • فوتونية • اشعاع جاما •••) واختلاف طاقتها (ابتداءً من اقل من الالكرون فولت الى " مليون بليون " الكترون فولت) أدت الى فهم العديد من الصفات التي تتميز بها النواة الذرية من ناحية التركيب الدقيق لها وكتلتها وسختها الكهربائية وحركتها المغزلية وحركتها المغزلية النظرية .

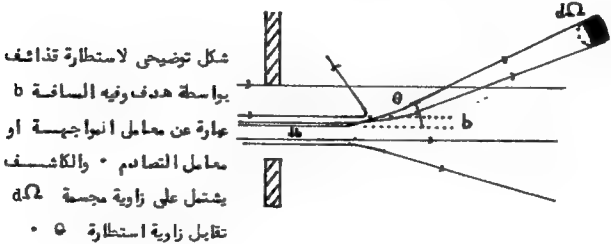
- استظارة الاشعاعات الكونية على اختلاف نوعيتها (ميونية • بيونية • نيوكليونية • انوية خفيفة • انوية متوسطة الكتلة • انوية ثقيلة الكتلة • انوية كتلتها أكثر ثقلاً • اشعة جاما • اشعة الكترونية • اشعة بوزيترونية • جسيمات النيوتريـنـو) أدت الى عدة اكتشافات هامة في مجال فيزياء الفضاـة Astrophysics وفي مجال فيزياء البيئة .

ولو أن الأمثلة التي أسردت عليه يتصف كل منها بخصائص مميزة لكل منها إلا ان الاساسيات العامة الخاصة بمظاهرة الاستظارة واحدة وتختلف فقط في التفاصيل الرياضية المعنية على هذه الاساسيات . ولتبدأ الآن بمناقشة تلك الاساسيات تبسـل عرض موجز لبعض من تلك الأمثلة .

مفهوم المقطع المستعرض للاستطارة :

من الناحية العملية فإن دراسة الاستطارة تستدعي تواجد حزمة مجمعة مسن القذائف (Projectiles) تتميز بطاقة محددة (في بعض الاحيان يكون الباحث الذى يجرى التجربة على علم بالحالة الاستقطابية الخاصة بتلك القذائف وفي تلك الاحيان يكون الناتج من القياسات له وقَّره عملية أكثر مما لو كانت غير مستقطبة) . هذه القذائف تُوجَّه الى هدف (Target) نرى حيث لها استطارة من جراء تفاعلها مع أنوية والكثرونات هذا الهدف . ويتم الكشف عن الجسيمات الناتجة من هذه الاستطارة بواسطة كاشف مناسب تبعاً للتجربة المعنية (قد يكون هذا الكاشف على سبيل المثال مستحلب نبوي - كاشف وميض - غرفة شمارة - ضاف الكرونى ٠٠٠٠) .

واكثر معامل فيزيائى يلخص نتائج مثل هذه التجارب هو ما يعرف بالمقطع المستعرض للاستطارة (Scattering Cross Section) وقد اختير تعريفه حتى يتواءم مع الفكرة التقليدية لتصادم جسيمين :



وانذا افترضنا ان :

I = شدة حزمة القذائف الموجهة للهدف (لكل وحدة مساحة في الثانية)
 N = عدد الجسيمات المستطارة بزاوية θ التى يسجلها الكاشف في كل ثانية
 A = المساحة الفعالة للكاشف الموجه تجاه القذائف المستطارة

$$\therefore N = I \cdot A \quad (7.1)$$

وتجدد الإشارة هنا الى ان كلام N و I و A يُنظر لها بمفهوم إحصائي إذ أن عدد القذائف الذى يصل الى الهدف يتم له ذلك بطريقة عشوائية تماماً إذ انه من المستحيل معرفة فى أى لحظة أى منها يصل الى هذا الهدف • من ناحية أخرى فان الكاشف يسجل عدداً متوسطاً ولا يستطيع تسجيل عدداً بذاته •

بعد ذلك يلاحظ ان أى من جسيمات القذائف القادمة فى اتجاه محور مشترك (وليكن المحور z) على بعد مستعرض b من مركز الهدف سوف يحدث له "فوضاً" استطارة بزاوية θ •

وعلى ذلك فان عدد الجسيمات $dN(\theta)$ التى يحدث لها استطارة بزاوية بين θ و $\theta + d\theta$ هى التى كانت لها مساحة مقطع $d\sigma$ تجاه الكاشف

$$dN(\theta) = I \cdot b \cdot db \cdot d\theta \quad (7.2)$$

حيث $d\theta$ عنصر زاوية السميت التى تقابل اتساع الكاشف بمواجهة القذائف المستطارة •

$$\therefore \frac{dN(\theta)}{I} = b \cdot db \cdot d\theta = d\sigma \quad (7.3)$$

بينما عنصر الزاوية المجسمة $d\Omega$ عبارة عن :

$$d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

ويلاحظ ان $d\sigma$ تعتمد بصفة عامة على طاقة الجسيمات والقذائف بجانب اعتمادها على زاوية الاستطارة θ • كذلك $dN(\theta)$ يتناسب طردياً مع الزاوية المجسمة $d\Omega$ التى تواجه الهدف • لذلك تكافئ النسبة $d\sigma / d\Omega$ "بدلاً" من $d\sigma$ حتى يكون نتيجة القياسات التجريبية مستقل عن الزاوية المجسمة

بينما المقطع المستعرض التفاضلى فى المجموعتين مرتبطان بالعلاقة التالية

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_L = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_c \cdot \frac{d(\cos \theta_c)}{d(\cos \theta_L)}$$

$$= \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_c \cdot \left\{ \frac{\left[\sqrt{1 - \frac{m^2 \sin^2 \theta_L}{M^2}} + \frac{m \cos \theta_L}{M} \right]^2}{\sqrt{1 - \frac{m^2 \sin^2 \theta_L}{M^2}}} \right\} \quad (7.5)$$

اذ ان :

$$\cos \theta_L = \frac{\frac{m}{M} \cos \theta_c}{\sqrt{1 + \frac{2m}{M} \cos \theta_c + \frac{m^2}{M^2}}} \quad (7.6)$$

$$\cos \theta_c = \cos \theta_L \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2} \sin^2 \theta_L - \frac{m}{M} \sin^2 \theta_L} \quad (7.7)$$

والآن نبدأ المعالجة الكمية للاستطارة ، وأول مثال لذلك هو أبسطه —
فيزيائيا وهو الخاص بالاستطارة المرنة Elastic Scattering ويقصد بها تلك
التي لا يصاحبها أى تغير فى طاقة الحركة .

الاستطارة المرنة فى اطار ميكانيكا الكم دون ذكر احداثى الزمن :

تبدأ المعالجة الكمية للاستطارة المرنة بفكرة تشيل الجسم الفذيفه بوجوده
مستويه " ψ_1 " حيث يرمز 1 الى ان الفذيفة فى حالتها الكمية الاصلية
initial quantum state تادة فى اتجاه موازى لمحور الاحداثى z :

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{A_1}{v}} e^{i(kz - \omega t)} \quad (7.8)$$

حيث :

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{شدة الفيض للجسيمات القادمة تجاه الهدف} \\ v &= \text{سرعة القذائف} \\ kh &= \text{كوة التحرك الخطي للقذائف} \end{aligned}$$

هذه الموجات المستوية سوف تتعرض لاستطارة من نوع معين نتيجة جهد التفاعل $\hat{V}(r)$ الذى يتميز به مركز الاستطارة (الجسيم الهدف) . معنى ذلك انه بجانب الموجات القادمة تجاه الهدف يكون هناك موجات منتشرة بعيدا عن الهدف تمثل بموجات كريبه تنقص تدريجيا من عدتها كلما بعدت عن مركز الاستطارة التى بدأت منه . أى أن الحالة النهائية ψ_f تمثل بالجمع التالى :

$$\psi_f = \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_1 + \psi_g \quad (7.9)$$

حيث ψ_g تمثل الموجات الكرية الناتجة عن الاستطارة التى أشرنا اليها ونعبر عنها كما يلى (راجع مثال محلول) :

$$\psi_g = f(\theta) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \quad (7.10)$$

ويجب ان تكون كل من الموجات القادمة ψ_1 والموجات المنتشرة خارج مركز الاستطارة ψ_f (المكونة من الموجات المستوية المتافعة والموجات الكرية ψ_g) تمثل حلول لمعادلة شرودنجر بصورتها العامة :

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi = 0 \quad (7.11)$$

ونود ان نشير هنا الى ان المسألة التى نحن بصدد حلها تختلف رياضيا عن ما درسناه فى ميكانيكا الكم قبل ذلك فى حالة حل معادلة شرودنجر لمستويات محددة لطاقة كمية مرتبطة (Bound Quantum State) إذ ان فى تلك المسائل السابقة كنا نهتم عن حل لمعادلة شرودنجر التى احتوت على معامل طاقة غير معروف ومن ثم توصلنا لقيم الطاقة المسموح بها والدوال الايجينية المنتمة لها بتحقيق الشروط الحدية وشروط ان دالة الحالة طيبة السلوك .

أما في مسائل الاستطارة فإن معامل الطاقة في معادلة شرودنجر معروف لدينا من البداية (لأن الجزء E محدد من ظروف التجربة بينما الجزء V نضع قيم افتراضية له) من الأمثلة الشائعة لذلك تطبيقات النموذج النوى الضوئية (Nuclear Optical Model) . والمسألة تلخص في إيجاد حلول لمعادلة شرودنجر والتي تتميز بصور معينة عند مسافات كبيرة من مركز الاستطارة مثل التي أشرنا إليها في معادلتى (7.8) و (7.9) و (7.10) . وفي الحقيقة معادلة (7.9) في صورتها هذه :

$$\psi_2(\vec{r}) \sim_{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + A_f(\theta, \phi) \frac{e^{ik \cdot r}}{r} \quad (7.12)$$

تعتبر أحد الشروط الحدية في مسائل الاستطارة . بجانب ذلك يجب ان لانتمى ان ψ تنصف بالاستمرارية على وجه الخصوص عند مركز الاستطارة .

الملاقة بين سعة الاستطارة f والقطع المستعرض للاستطارة σ :

في معادلة (7.12) $A_f(\theta, \phi)$ ترمز لسعة الوجه المستطارة وواضح انها تعتمد على الاتجاه (θ, ϕ) الذى حدثت فيه الاستطارة . ولقد أدخل المعامل $1/r$ " لأن كثافة احتمال الاستطارة P_{θ} " في أى اتجاه تنقسم تبعاً لقانون التربيع العكس مثل $1/r^2$ " مع ملاحظة ان الطول الموجى للجسيمات المستطارة λ أو λ تختلف عن تلك للجسيمات القذائف (الا في حالة الاستطارة المرنة فتكون هي نفسها) .

والآن بتطبيق معنى احتمال تواجد أى جسيم تبعاً لاساسيات ميكانيكا الكم نلاحظ ان:

احتمالية أن نجد أى جسيم قذيفة قادم في أى عنصر حجمي $d\tau$ من الحزمة الساقطة = $P_1 d\tau$ =

تجاه الهدف
 $= \psi_1^* \psi_1 d\tau = A^* A d\tau = A^* A dx dy dz \quad (7.13)$

وهذا الاحتمال ينساب مساحة dz (تذكر ان الجسيمات القذائف قادمة في اتجاه موحد موازى للمحور z) خلال المساحة $dx \cdot dy$ في الزمن $dt = dz/v$ اذا تيار الاحتمال المخترق وحدة المساحات (اى كثافة الفيض القادم) هو :

$$\frac{P_1 d\tau}{dx \cdot dy \cdot dt} = v A^* A$$

وبالمثل احتمال ان نجد جسيم مستطاري في عنصر حجومى $d\tau'$ حيث

$$d\tau' = r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta d\phi dr = r^2 d\Omega dr \quad (7.14)$$

عبارة عن :

$$\begin{aligned} P_g d\tau' &= \psi_g^* \psi_g d\tau' \\ &= A^* A \cdot f^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \cdot \frac{r^2}{r^2} \cdot d\Omega \cdot dr \end{aligned}$$

$$\therefore P_g d\tau' = A^* A \cdot f^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) d\Omega dr \quad (7.15)$$

وعلى ذلك فان تيار الاحتمال عند النقطة (r, θ, ϕ) الناتجة عن الجسيمات المستطارة التى تتحرك قطريا (radially) بسرعة v خلال عنصر الزاوية المجمة $d\Omega$ هى :

$$\frac{P_g d\tau'}{dt} = v \cdot A A^* f^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) d\Omega$$

ومن تعريف القطع المستمر $\sigma(\theta, \phi)$ للاستطارة على النحو التالى :

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{d\Omega}{\text{كثافة تيار الاحتمال للقذائف القادمة}} \quad (7.16)$$

نحصل على العلاقة التي تربط بين سعة الاستطارة والمقطع المستعرض :

$$\sigma(\theta, \theta) = f^*(\theta, \theta) f(\theta, \theta) = |f(\theta, \theta)|^2 \quad (7.17)$$

المعالجة الكمية للاستطارة المرنة :

هذه المعالجة مبنية على تحقيق الشرط الذي جاء بمعادلة (7.12) والذي ينص على أن الدالة الموجية التي تمثل حل معادلة شرودنجر عند المسافات البعيدة عن مركز الاستطارة تأخذ الصورة التالية (لاحظ أن تأثير الجهد V يصبح عند تلك المسافات مهملًا) :

$$\psi(r, \theta, \theta) = e^{ikr \cos \theta} + \frac{1}{r} f(\theta) \cdot e^{ik \cdot \vec{r}} \quad (7.18)$$

(نضع A يساوي الوحدة لا يؤثر على النتائج)
إذا المرجح المستطارة " $\frac{1}{r} f(\theta) e^{ik \cdot \vec{r}}$ " عبارة عن :

$$\frac{1}{r} f(\theta) \cdot e^{ik \cdot \vec{r}} = \psi(r, \theta, \theta) - e^{ikr \cos \theta}$$

$$\therefore f(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \psi(r, \theta, \theta) - e^{ikr \cos \theta} \right\} r \cdot e^{-ik \cdot \vec{r}} \quad (7.19)$$

وبسبب أن الحل الصحيح لمعادلة شرودنجر يمكن أن يتم فقط في بعض الحالات القليلة العدد إذا علينا أن نستخدم طرق تقريبية تعتمد بصورة أساسية على طبيعة المشتت الجهد الذي يُعزى له حدوث الاستطارة وكذلك تعتمد على النسبة بين طاقة الوضع للجسيمات والقذائف وطاقة الحركة لها • وكثال لذلك لندرس الطريقة المعناه :

طريقة الموجات الجزئية (Partial-Wave Method)

اساس هذه الطريقة يعود للدراسة الكلاسيكية للحركة الموجية الصوتية التي اوضحها العالم الانجليزي لورد كلفن (Lord Kelvin) وهي تعتمد على العلاقتين التاليتين :

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= e^{ikr \cos \theta} \\ &= \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cdot e^{\frac{i\pi l}{2}} \cdot P_l(\cos \theta) \cdot J_l(kr) = \psi_1 \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \left\{ e^{ikr \cos \theta} + \frac{1}{r} f(\theta) \cdot e^{ikr} \right\} &= \\ &= \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cdot e^{\frac{i\pi l}{2}} \cdot P_l(\cos \theta) \cdot G_l(kr) \\ &= \psi(r, \theta, \phi) \end{aligned} \quad (7.21)$$

حيث :

$\psi_1 = e^{ikz}$ = الموجة القادمة تجاه مركز الاستطارة

$\psi(r, \theta, \phi) = "d"$ = الموجة المنطلقة بعيدا عن مركز الاستطارة في زاوية مجسة

θ = العدد الموجي $k = \frac{p}{\hbar}$ وزاوية الاستطارة

p = كمية التحرك الخطي للجسيمات القذائف

l = عدد الكم للموجة الجزئية التي تتكون من مجموعها الموجة المنطلقة بعيدا

عن مركز الاستطارة $\psi(r, \theta, \phi)$ وهذا العدد مرتبط بالحركة

الزاوية الدائرية (Legendre Polynomial) متعددة الحدود

$P_l(\cos \theta)$ = لليجاندر

$J_l(kr)$ = دالة بسل (Bessel Function) القابلة للموجة الجزئية المتباعدة بعدد الكم l قبل تأثيرها بالتفاعل

$G_l(kr)$ = دالة بسل القابلة للموجة الجزئية المتباعدة بعدد الكم l بعد تأثيرها بالتفاعل نتيجة \hat{V} وهذه الدالة هي حل للمعادلة

القطرية مُعبر عنها بكميات ليس لها أبعاد :

$$G_l'' + \left[\epsilon_k^2 + \epsilon^2(\rho) - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] G_l = 0 \quad (7.22)$$

حيث :

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad l = \text{ثابت}$$

$$\epsilon_k = ka = \text{معامل الطاقة الكلية}$$

$$\epsilon(\rho) = \sqrt{-\frac{V}{E}} \quad \text{معامل طاقة الوضع}$$

وبالتعويض من معادلتى (7.20) و (7.21) فى (7.19) ومع بعض المعالجة الجبرية (راجع مثال محلولى $\gamma - \gamma$) نصل الى أن :

$$f(\theta, \phi) = \frac{1}{k} \sum (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta^l} \sin \delta^l \quad (7.23)$$

$$\therefore \sigma(\theta, \phi) = \chi^2 \left| \sum (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta^l} \sin \delta^l \right|^2 \quad (7.24)$$

بينما المقطع المستمر الكلى

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} = \sigma &= \int_0^\pi P_l(\cos \theta) \cdot P_l(\cos \theta) \cdot 2\pi \sin \theta \, d\theta \\ &= 4\pi \chi^2 \sum (2l+1) \sin^2 \delta^l \end{aligned} \quad (7.25)$$

حيث استغندنا من الخاصية التالية لمتعددة حدود ليجاندر :

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos \theta) \cdot P_{l'}(\cos \theta) \cdot \sin \theta = \frac{2}{2l+1} , \quad l = l' \quad (7.26)$$

$$= 0 , \quad l \neq l'$$

معالجة الاستطارة بطريقة التغير (Variational Method)

طريقة التغير شائعة الاستخدام في عدة مجالات في الرياضيات الهندسية والفيزياء مثل استخدامها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية وما يشبهها في مجال الفيزياء الجزئية والذرية .

ولقد وُجد إمكانية استخدامها في معالجة مسألة الاستطارة عندما تكون الطريقة الموجية الجزئية مناسب تطبيقها . وفيما يلي سوف نحاول تلخيص بعض ملامحها بالأسلوب الذي أوضحه العالمان هولثن وكون (Hulthen and Kohn) :

إذا ما حددنا في حيز هيلبرت لكل دالة " ψ " عدد " $E(\psi)$ " يُعبر عن القيمة المتوقعة لطاقة المجموعة الفيزيائية التي نتحدث عنها بمعنى أن :

$$E(\psi) = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (7.27)$$

فانه باستبدال الدالة " ψ " بدالة مجاورة " $\psi + \delta\psi$ " يتم الحصول على قيمة جديدة للطاقة " $E(\psi + \delta\psi)$. فإذا كانت " $\delta\psi$ " صغيرة بدرجة كافية يمكن حساب الفرق " $[E(\psi + \delta\psi)] - [E(\psi)]$ بين قيمة الطاقة للترتبة الأولى من " $\psi + \delta\psi$ " وهذا يسمى بالتغير " $\delta E(\psi)$ " المقابل لتغير الدالة من " ψ " الى " $\psi + \delta\psi$ " . ولا يجاد

نستفيد من معادلة (7.27) كما يلي :

$$E(\psi + \delta\psi) = \frac{\langle \psi + \delta\psi | \hat{H} | \psi + \delta\psi \rangle}{\langle \psi + \delta\psi | \psi + \delta\psi \rangle}$$

$$\approx \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle + \langle \delta\psi | \psi \rangle + \langle \psi | \delta\psi \rangle} \quad (7.28)$$

وباستخدام نظرية ذات الحدين نجد ان الفرق بين قيمتي الطاقة هو :

$$E(\psi + \delta\psi) - E(\psi) = \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$\cdot \left[1 - \frac{\langle \delta\psi | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \right]$$

$$\approx \frac{\langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H} | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} - \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \langle \delta\psi | \psi \rangle + \langle \psi | \delta\psi \rangle \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{|\langle \psi | \psi \rangle|^2}$$

وبما ان الحسابات يراود انسابها للرتبة الاولى في " $\delta\psi$ " ومع تذكر ان العامل \hat{H} هيرميتيه اذا

$$\therefore \delta E(\psi) = \frac{\langle \delta\psi | \hat{H} | \psi \rangle + \langle \hat{H} \psi | \delta\psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$= \frac{\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \langle \delta\psi | \psi \rangle + \langle \psi | \delta\psi \rangle \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle}{|\langle \psi | \psi \rangle|^2} \quad (7.29)$$

ومن هذه المعادلة يتضح ان اذا كان " $\hat{H} \psi = E \psi$ " فإن

" $\delta E(\psi) = 0$ " وهذا معناه ان الحالات المرتبطة (Bound States)

تتسبب في اختفاء تغيرات الطاقة . وفي الواقع تلك الحالات يمكن

التوصل اليها باستخدام "دوال اختيارية" وليرمز لها بالرمز " ψ_{\pm} " وهذه

تعتمد على مجموعة محددة من المعاملات التي يمكن تسميتها
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ " بشرط أنها تأخذ قيم مستقرة (لا تتغير
 فيها) إذا حقت العلاقة التالية :

$$\frac{\partial E(\psi_j)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7.30)$$

ومن هذا ينتج مجموعة من المعادلات بعدد n تتواجد معا في نفس الوقت وهذه
 يمكن حلها لإيجاد المعاملات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ للحصول على دالة
 موجية تقريبية بينما الطاقة المقابلة تعطى بالدالة $E(\psi_j)$.

وفيما يلي نحاول توضيح تطبيق هذه الطريقة لحساب أزاحة الطور η
 الخاصة بالاستطارة لدرجة تقريبية مقبولة :

والسهولة نفترض استطارة موجات جزئية ذات تامل كرى أى تقابل عدد الكم
 $l = 0$ " وبذلك تأخذ المعادلة القطرية التي سبق الإشارة لها الصورة التالية
 (حيث نشير هنا لجزء دالة المرجح بالرمز F) :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) \right] F_0(r) = 0 \quad (7.31)$$

ومطلوب حلها في إطار الشرط الحدى التالى (راجع مثال محلول $\gamma - \gamma$) :

$$F_l(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A_l \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi + \eta_l) \quad (7.32)$$

بمعنى أن :

$$F_0(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A_0 \sin(kr + \eta_0), \quad F_0(0) = 0 \quad (7.33)$$

والان لو اعتبرنا دالة $F(r)$ مناسبة تحقق مثل هذا الشرط الحدى الخاص
 بالدالة $F_0(r)$:

$$F(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A \sin(kr + \eta), \quad F(0) = 0 \quad (7.34)$$

وكان اختيار هذه الدالة $F(r)$ بحيث يضمن ان التكامل التالى يقرب من التلاشى كلما بعدنا عن مركز الاستطارة :

$$\int_0^{\infty} F(r) \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U(r) \right] F(r) dr = I(F) \quad (7.35)$$

فانه بتغيير تلك الدالة $F(r)$ الى دالة مجاورة " $F = F + \delta F$ " بحيث تحقق الشروط الحدية :

$$n_F = F + \delta F$$

$$\underset{r \rightarrow \infty}{\approx} (A + \delta F) \sin (kr + \eta + \delta n) , \quad n_F(0) = 0 \quad (7.36)$$

يكون فى هذه الحالة التغير هو " $\delta I(F)$ " أى الفرق بين التكامل الخاص بالدالة F والتكامل الخاص بالدالة المجاورة n_F أى أن التغير هو :

$$\begin{aligned} \delta I(F) &= \int_0^{\infty} \delta F \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U \right] F dr \\ &+ \int_0^{\infty} F \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U \right] \delta F dr \end{aligned} \quad (7.37)$$

لنقارن بين هذه المعادلة ومعادلة (7.29)

وبما ان :

$$\left(\frac{d}{dr} \right) \delta F = \left(\frac{d}{dr} \right) [n_F - F] = \frac{dn_F}{dr} - \frac{dF}{dr} = \delta \left(\frac{dF}{dr} \right) = \delta F'$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \delta I(F) &= 2 \int_0^{\infty} \delta F \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U \right] F dr \\
 &+ \left[F dF - F^* dF \right]_{r=0}^{r=\infty} \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \delta F \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U \right] F dr \\
 &+ \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ A (A + \delta A) k \left[\sin (kr + \eta) \cos (kr + \eta + \delta \eta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \cos (kr + \eta) \sin (kr + \eta + \delta \eta) \right] \right\} \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \delta F \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U \right] F dr + \left\{ -A(A + \delta A) k \sin \delta \eta \right\} \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \delta F \left[\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - U \right] F dr - A^2 k \delta \eta \quad (7.38)
 \end{aligned}$$

وإذا كان " $F = F_0$ " نحصل على :

$$\delta I (F_0) = -A^2 \cdot k \cdot \delta \eta \quad (7.39)$$

والان اذا تم تحديد نوعية الدوال التي يتم التعبير بالنسبة لها بحيث يشترط ان تكون " $A = \sec \eta$ " فان المعادلة

$$F(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A \sin (kr + \eta)$$

$$\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} A \sin kr \cdot \cos \eta + A \cos kr \sin \eta$$

تصح

$$F(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sin kr + \tan \eta \cos kr, F(0) = 0 \quad (7.40)$$

في نفس الوقت نلاحظ انه اذا كان لدينا دالة اخرى $J(F)$ تساوي $I(F) + k \tan \eta$ " فمعنى ذلك ان $\delta J(F_0)$ " عبارة عن :

$$\begin{aligned} \delta J(F_0) &= \delta [I(F_0) + k \tan \eta] = \delta I(F_0) + k \delta (\tan \eta) \\ &= \delta I(F_0) + k \sec^2 \eta \delta \eta \\ &= \delta I(F_0) + k A^2 \delta \eta \\ &= -A^2 \cdot k \cdot \delta \eta + A^2 \cdot k \cdot \delta \eta \\ &= \text{ZERO} \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\therefore J(F_0) = k \tan \eta_0 \quad (7.42)$$

وهذه النتيجة توضح ان الدالة المرجية F_0 " الغير مقترنة باى تقريب تجعل الدالة $J(F)$ " مستقرة (Stationary) وبالاكان معرفة فرق الطور η " بدلالة قيمتها المطلقة في معادلة (7.42).

الاستطارة التي يتم فيها تبادل جسيمات بين حزمة القذائف والهدف :

(Scattering Accompanied by Rearrangement of Particles
between Projectiles and Target)

في مثل هذه الاحيان يلاحظ ما يلي :

- تبادل الالكترونات بين الذرات او الجزيئات المتصادمة مع بعضها .
 - تبادل البروتونات او النيوترونات مع تلك الموجودة اصلا في انوية مادة الهدف .
- وحيث انه في بعض الاحيان الاخرى ربما تكون طبيعة الجسيمات المكونة للمجموعة الفيزيائية بعد الاستطارة مختلفة تماما عن طبيعة الجسيمات المكونة للمجموعة الفيزيائية قبل الاستطارة فمفوف يتم تمثيل هذا النوع من الاستطارة على النحو التالي :



ويتضح من ذلك ان الهاميلتونية الخاصة بالحالة النهائية تختلف عن الهاميلتونية الخاصة بالحالة الابتدائية والتي لم تتعرض للاطلاق بعد. زائد الجهد " V " الخاص بالتفاعل . وعادة يتم استخدام فترة " القناة الكمية لاعادة الترتيب (Quantum Mechanical Rearrangement Channel) بمعنى ان الحالة الابتدائية تقابل القناة الخاصة بالترتيب i بينما الحالة النهائية تقابل القناة الخاصة بالترتيب f وتطبيقا لقانون بقا الطاقة فان الهاميلتونية والاقلاق يحققان المعادلة :

$$\hat{H}_i + \hat{V}_i = \hat{H}_f + \hat{V}_f \quad (7.43)$$

ويمكن التعبير عن الحالة الابتدائية كما يلي :

$$\Phi_{ai}(r_i, x_i) = \Phi_{kni}(r_i, x_i) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \chi_{ni}(x_i) \quad (7.44)$$

حيث :

$\vec{r}_1 =$ متجه موضع مركز كتلة A بالنسبة لمركز كتلة B
 $x_1 =$ الاحداثيات الداخلية للمجموعتين A و B المتفاعلتين
 $\chi_1 =$ الدالة الموجية الخاصة بالحالة الداخلية (intrinsic) لكل من A و B

بينما الطاقة الكلية للمجموعة الابتدائية E يمكن التعبير عنها كما يلي :

$$E = E_{kni} = E_{ki} + E_{ni} \quad (7.45)$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_1} + E_{ni}$$

حيث :

$E_{ki} =$ الكتلة المختلة لها μ_1 ، طاقة الحركة النسبية للمجموعة A و B
 (في الطاقة الابتدائية)

$E_{ni} =$ الطاقة الداخلية للمجموعة A و B (في الطاقة الابتدائية)

وبذلك تتحقق المعادلة الايجينية :

$$H_1 \Phi_{kni} = E_{kni} \Phi_{kni} \quad (7.46)$$

وبالمثل الحالة النهائية تمثل على النحو التالي :

$$\Phi_{bf}(r_f, x_f) = \Phi_{pf}(r_f, x_f) = e^{i\vec{l} \cdot \vec{r}_f} \chi_{pf}(x_f) \quad (7.47)$$

حيث \vec{r}_f هو متجه الموضع لمركز كتلة C بالنسبة لمركز كتلة D . وهذه
 الحالة النهائية تتميز بالطاقة E_{pf} حيث

$$E_{pf} = E_{lf} + E_{pf} \quad (7.48)$$

$$6 \quad E_{pf} = \frac{\hbar^2 l^2}{2\mu_f} = D, C \quad \text{طاقة الحركة النسبية للمجموعة} \quad (7.49)$$

وفيها μ_f هي الكتلة المخزلة للجسيمين C و D بينما الطاقة الداخلية لها E_{pf} ومرة أخرى قانون بقاء الطاقة معناه :

$$E_{ki} + E_{ni} = E = E_{kf} + E_{pf} \quad (7.50)$$

$$\therefore l^2 = \frac{\mu_f k^2}{\mu_i} + \frac{2\mu_f (E_{ni} - E_{pf})}{\hbar^2} \quad (7.51)$$

ونسمح للحالات النهائية فقط التي تحقق شرط ان الجانب الايمن لهذه المعادلة ان تكون غير سالبة . وان دالة الاستطارة ψ تحقق معادلة شرودنجر :

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (7.52)$$

وعندما تصبح r_f كبيرة جدا فان حالة الاستطارة تسلك كما لو كانت موجات مستطارة تمثل الحالات النهائية الممكنة للجسيمين C و D . وط ان هاذين الجسيمين غير موجودين اصلا فان معنى ذلك لا يوجد موجات مستوية قادمة

$$\therefore \psi(r_f, x_f) \underset{r_f \rightarrow \infty}{\sim} \sum_p' f(r_f | k_{ni} \rightarrow pf) \frac{e^{i/r_f}}{r_f} \chi_{pf}(x_f) \quad (7.53)$$

حيث عملية الجمع \sum' تتم على جميع الحالات الممكنة بما يتفق مع قانون بقاء الطاقة . بينما

$$f(r_f | k_{ni} \rightarrow pf) = \left[\begin{array}{l} \text{سعة الاستطارة التي تتقبل انتاج الطاقة } \chi_{pf} \text{ الخاصة} \\ \text{بالجسيمين } C \text{ و } D \text{ من الحالة الابتدائية } \Phi_{k_{ni}} \end{array} \right]$$

والمقطع المستعرض :

$$\sigma(r_f | kni \rightarrow pf) = \left(\frac{v_{pf}}{v} \right) | f(r_f | kni \rightarrow pf) |^2 \quad (7.54)$$

أو

$$\sigma(\Phi_{kni} \rightarrow \Phi_{pf}) = \left(\frac{v_{pf}}{v} \right) | f(\Phi_{kni} \rightarrow \Phi_{pf}) |^2 \quad (7.54)$$

التمييز بين البوزونات والغيرميونات أثناء الاستطارة وأثر ذلك على المقطع المستعرض لها :

مثلاً اشرفنا قبل ذلك فان الجسيمات المعروفة باسم البوزونات (Bosons) هي تلك التي تتميز بحركة مغزلية ذاتية عدد الكم الخاص بها 0 و 1 و 2 و ... أى عدد صحيح من \hbar بينما الغيرميونات هي تلك الجسيمات التي تتميز بالحركة المغزلية الذاتية لها بعدد كم $\frac{1}{2}\hbar$ و $\frac{3}{2}\hbar$ و ... الخ . لتستدرس الآن ماذا يحدث لو تصادم اثنان من البوزونات مع بعضها ثم نتبع ذلك بالحدسيات عن تصادم اثنين من الغيرميونات مع بعضها . وللسهولة ليكون مثال البوزون هو جسيم الفا (حركته المغزلية صفراً) بينما مثال الغيرميون الكرون . معنى ذلك ان لكل من الطائفتين يكون لدينا (راجع معادلة (7.7) ومعادلة (7.5)) :

$$m_1 = m_2$$

$$6 \quad \sigma_c = 2 \sigma_f$$

$$6 \quad \sigma(\theta_f, \theta_f) = 4 \cos \theta_f \cdot \sigma_c(2\theta_f, \theta_f) \quad (1)$$

ولالاعتاد لتسهيل المعالجة الرياضية سوف نفترض دالة الجهد بينهما تعتمد فقط على الفرق \vec{r} بين متجهي وضعيهما \vec{r}_1 و \vec{r}_2 ، $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. بينما موضع مركز الكتلة لها R عبارة عن :

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \quad (7.56)$$

أما متجه العدد الموجي للمجموعة \vec{K} فهو $(\vec{K} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ بينما نضع

$$k = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{m_1 + m_2} = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (7.57)$$

على هذا الأساس فإن التعبير عن دالة الحالة Φ_G بدلا من كونه :

$$\Phi(r_1 r_2 | f) = e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2} + e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_2} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_1} \quad (7.58)$$

نستطيع تحويله بدلالة \vec{r} , \vec{K} , k كما يلي :

$$\Phi_G(\vec{r}, \vec{R} | f) = e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}} [e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}]$$

فإذا كانت الدالة التي تمثل حل معادلة شرودنجر هي $\psi(r)$ بمعنى أن :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (7.59)$$

مع تحقيق الشرط الحدي :

$$\psi(r) \sim_{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(r) \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} \quad (7.60)$$

فإن الدالة التي تتميز بالتماثل (لأنها تمثل مجموعة فيزيائية تشتمل على اثنين مسن البوزونات) :

$$\psi(r | f) = \psi(r) + \psi(-r) \quad (7.61)$$

تحقق أيضا معادلة (7.59) لأن $\left\{ V(r) = V(-r) \right\}$ $\nabla_{-r}^2 = \nabla_r^2$ كما تحقق الشرط الحدي :

$$\psi(r|\mathcal{M}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \left[f(r) + f(-r) \right] \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} \quad (7.62)$$

ونلاحظ ان الجزء " $f(r) + f(-r)$ " هي سعة الاستطارة التي يحدث خلالها ان احد الجسيمين يتحرك في اتجاه r والاخر يتردد في الاتجاه $-r$ وبذلك يكون المقطع المستعرض هو (ثابت المعايرة يساوى الوحدة) :

$$\begin{aligned} \sigma_c(\theta, \theta) &= N \left| f(r) + f(-r) \right|^2 \\ &= N \left| f(\theta_c, \theta) + f((\pi - \theta_c), (\theta + \pi)) \right|^2 \\ &= N \left\{ \left| f(\theta_c, \theta) \right|^2 + \left| f((\pi - \theta_c), (\theta + \pi)) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re} \left[f^*(\theta_c, \theta) \cdot f((\pi - \theta_c), (\theta + \pi)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.63)$$

وهنا ثابت المعايرة N مساويا للوحدة .

ولكن سعة الاستطارة عبارة عن (راجع مثال محلول (٢-٧))

$$f(\theta, \theta) = f(\theta) = - \frac{\gamma}{2 k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{[-i\gamma \log(\sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2i \cdot \arg(1+i\gamma)]} \quad (7.64)$$

على اساس ان الاستطارة بين الجسيمين الفا نعتبره هنا نتيجة التفاعل الكولومى فقط .

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_f(\theta_f, \theta_f) &= 4 \cos^2 \theta_f \left[\frac{Z_0^2}{4 - \epsilon_0 M v^2} \right]^2 \cdot \left[\operatorname{cosec}^4 \theta_f + \sec^4 \theta_f \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{cosec}^2 \theta_f \sec^2 \theta_f \cdot \cos \left\{ \frac{4 Z_0^2}{4 \pi \epsilon_0 M v} \log \tan^2 \theta_f \right\} \right] \end{aligned} \quad (7.65)$$

هذا فيما يختص باستطارة جسيم الف بواسطة جسيم الف آخر كثال لاستطارة الهوزونات . أما بالنسبة لاستطارة الكترون بواسطة الكترون آخر كثال لاستطارة الغيرميزونات فان نفس النتيجة (7.63) تستخدم هنا ولكن بالإضافة الى ذلك نلاحظ مايلي :

وأينا في الباب الرابع أن نظار الحركة المغزلية $\frac{1}{2} \hbar$ مع حركة مغزلية $\frac{1}{2} \hbar$ تؤدي الى ظهور أربع دوال $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,0}$ و $\Phi_{1,-1}$ و $\Phi_{0,0}$. الثلاث دوال الاولى منها تتميز بانها متماثلة في حيز الحركة المغزلية بينما الدالة الرابعة $\Phi_{0,0}$ تتميز بانها غير متماثلة في هذا الحيز . معنى ذلك ان الدوال الثلاث الاولى يجب ان تستخدم $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,0}$ و $\Phi_{1,-1}$ بينما الدالة الرابعة $\Phi_{0,0}$ يجب ان تستخدم مع $[u_1(1) u_2(2) - u_1(2) u_2(1)]$ حيث $u_n^2 = u_n^1$.
ترمز لمجموعة الدوال الكاملة المرتبطة باحداثيات الحيز (r) للالكترونية ، ومعنى هذا بالتالى ان الدوال $\Phi_{1,1}$ و $\Phi_{1,0}$ و $\Phi_{1,-1}$ تستخدم مع $[\psi(r) - \psi(-r)]$ والدالة $\Phi_{0,0}$ تستخدم مع $[\psi(r) + \psi(-r)]$.

وحيث ان كل من تلك الحالات لها سعة استطارة تميزها وبافتراض انها جميعا تتواجد باحتمالية متساوية اذا القطع المستعرض لاستطارة الكترون بواسطة الكترون أخسر تعطى بالعلاقة التالية :

$$\sigma_c(\theta_c, \theta_c) = \frac{1}{2} \left[f(\theta_c, \theta_c) + f((\pi - \theta_c), (\theta_c + \pi)) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[f(\theta_c, \theta_c) - f((\pi - \theta_c), (\theta_c + \pi)) \right]^2 \quad (7.66)$$

$$\therefore \sigma_f(\theta_f, \theta_f) = 4 \cos \theta_f \left(\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v^2} \right) \cdot \left[\operatorname{cosec}^4 \theta_f + \sec^4 \theta_f - \operatorname{cosec}^2 \theta_f \sec^2 \theta_f \cdot \cos \left(\frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 m v} \log \tan^2 \theta_f \right) \right] \quad (7.67)$$

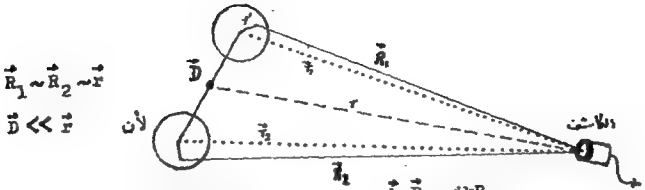
والجدير بالذكر ان نتائج التجارب التي أجريت باستخدام غرفة المحاية اوضحت صفة العلاقاتين (7.65) و (7.67) •

استطارة جسيم بواسطة جسيمين آخرين في نفس اللحظة :

مثل هذه الاستطارة تحدث بين الجسيمات اذا كان التفاعل بينها كهرومغناطيسيا مثلما يحدث عند استطارة الكترون بواسطة ذرئى جزئى • او اذا كان التفاعل بينهما نوويا مثلما يحدث عند تفاعل نيوكليون مع اثنين من النيوكليونات داخل نفس النواة الأم (الانوية الاخرى) المجاورة لها ليس لها تأثير لأن القوى النووية قوى تمييز بأنهم قصيرة المدى - ١٠ - ١٥ متر او اقل - ومختلفة اذاً تماما عن التفاعلات الكولومية •

ولتسيط المسألة بقدر الامكان لتأخذ حالة محددة ولتكن استطارة حزمة الكترونية بواسطة جزيئات الأكسجين :

عندما تقترب موجات الالكترونات تجاه جزيى الأكسجين فانه عندما تصل اليه يكون هناك فرق في الطور بين تلك التى تصل عند احد ذرتيه والاخرى وذلك بالمقارنة بالطور نسبة الى مركز الجزيى • فاذا رمزنا للمسافة " المتوسطة " الفاصلة بين ذرتى الجزيى بالمتجه \vec{D} فان احد الطورين يكون مساويا " $\vec{D} \cdot \vec{k} / 2$ " بينما الطور عند الذرة الثانية يكون مساويا " $\vec{D} \cdot \vec{k} - 2$ " • معنى ذلك ان موجه الالكسرون المستطارة عند وصولها عند الكاشف تكون عبارة عن :



$$\vec{R}_1 \sim \vec{R}_2 \sim \vec{r}$$

$$\vec{D} \ll \vec{r}$$

لأن

$$\psi_{\text{scatt.}} = e^{i \frac{\vec{k} \cdot \vec{D}}{2}} \left\{ \frac{e^{i k R_1}}{R_1} f(\theta) \right\} + e^{-i \frac{\vec{k} \cdot \vec{D}}{2}} \left\{ \frac{e^{i k R_2}}{R_2} f(\theta) \right\}$$

حيث سعة الاستطارة يعمود عنها في هذه الحالة فيما بعد بالاستفادة من معادلسة (7.64) التي يتم اشتقاقها في المثال المطول رقم (٧-٣) .

وإذا ما تذكرنا أن بعدد الاستطارة للتيه k يصبح k' (ولوان $|k'| = |k|$) فان :

فان :

$$k R_1 = k r - \frac{1}{2} \vec{k}' \cdot \vec{D}, \quad k R_2 = k r + \frac{1}{2} \vec{k}' \cdot \vec{D}$$

وعليه نحصل على :

$$\psi_{\text{scatt.}} = \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} \left\{ e^{i \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{D} - \vec{k}' \cdot \vec{D}}{2} \right)} + e^{-i \left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{D} - \vec{k}' \cdot \vec{D}}{2} \right)} \right\} f(\theta)$$

$$= 2 \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{r} \cdot \cos \frac{(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{D}}{2} \cdot f(\theta)$$

$$\therefore \sigma(\theta) = 4 \cos^2 \left[\frac{(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{D}}{2} \right] \cdot |f(\theta)|^2$$

مثال محلّول (١٧) :

تفاعل ما مع أنوية $^{12}_6\text{C}$ المقطع المستعرض " σ " له عبارة عن واحد مللى بارن $1 \text{ mb} = 1 \text{ millibarn} = 10^{-27} \text{ cm}^2$. فإذا فُرض أن السرعة الكربونية التي تُسلط عليها حزمه قذائف نووية خاصة بهذا التفاعل سُميها " x " عبارة عن $10^3 \text{ سم} \cdot \text{سم}^{-1}$ ، وكانت " μ " تساوى $2 \text{ جم} / \text{سم}^3$. احسب النسبة " I/I_0 " التي يحدث لها هذا التفاعل .

الحل :

إذا رمزنا لعدد افجارد روبا الوفر N_a (وهو عبارة عن 6.02×10^{23} لكل جزئ جواى) فان عدد أنوية الكربون فى وحدة الحجم من الهدف يكون ساويا :

$$n = \frac{N_a \cdot \rho \cdot x}{12}$$

$$\therefore \frac{I}{I_0} = \sigma \cdot n = \frac{(10^{-27}) \cdot (6.02) \times 10^{23} \cdot (2) \cdot (0.1)}{12} = 10^{-5}$$

مثال محلّول (٢٧) :

وضح كيف ان الموجة المستوية $e^{ikr \cos \theta} = e^{ikz}$ تُعتبر تطابق متوافق من موجات كرية .

الحل :

بما ان الموجة المستوية تقابل حركة جسيم حرا اذا تعامل مع المعادلة الموجية فى صورتها :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

وأحد حلولها هو :

$$\psi = e^{iks} = e^{ikr \cos \theta} \quad (7.68)$$

كما ان من الممكن حل هذه المعادلة بدلالة الاحداثيات القطبية الكرية مع اعتبار وجود تماثل كروي (أى ان الزاوية θ تغيرها لا يؤثر فى الدالة لان ψ بصورتها المعطاة " $e^{ikr \cos \theta}$ " تعنى ذلك) :

$$\psi = R(r) \cdot \theta(\theta)$$

$$\therefore \frac{1}{R} \left(\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \right) + k^2 r^2 R(r) =$$

$$= - \frac{1}{\theta(\theta)} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) = \ell(\ell + 1) \quad (7.69)$$

وسبب جعل الدالة $\theta(\theta)$ محدده عند " $\cos \theta = \pm 1$ " فان هذا يعنى ان $\ell = 0, 1, 2, \dots$ وعلى ذلك فالحلول بالنسبة للدالة القطبية $R(r)$ والدالة القطبية $\theta(\theta)$ تصبح :

$$R(r) = j_{\ell}(kr) \quad \text{دالة بيسل} \quad (7.70)$$

$$\theta(\theta) = P_{\ell}(\cos \theta) \quad \text{دالة ليجاندر متعددة الحدود} \quad (7.71)$$

إذا حل المعادلة الموجية للجسيم الحريكى يمكن التعبير عنه كجمع خطى لدالة بيسل ودالة ليجاندر :

$$\therefore e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (7.72)$$

وبضرب هذه المعادلة في $P_l(\cos \theta) d(\cos \theta)$ والاستفادة من خاصية دوال ليجاندر :

$$\int_{-1}^1 P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2 \delta_{ll'}}{2l+1} \quad (7.73)$$

$$\therefore A_l \frac{2}{2l+1} j_l(kr) = \int_{-1}^{+1} e^{ikr} P_l(\cos \theta) d \cos \theta$$

وحيث ان هذه النتيجة صحيحة لجميع قيم kr اذاً لو اخترنا $r \rightarrow \infty$ نحصل على (مع اجرا التكامل في الطرف الايمن بالتجزئ) :

$$\therefore A_l \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{1}{kr} \cdot \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) = \frac{2}{kr} i^l \sin(kr - \frac{l\pi}{2})$$

$$\therefore A_l = (2l+1) i^l \quad (7.74)$$

$$\therefore e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_0^{\infty} (2l+1) \cdot i^l \cdot P_l(\cos \theta) \cdot j_l(kr) \quad (7.75)$$

مثال محلولة (٧-٣) :

استنتج معادلة (7.64) الخاصة بالاستطارة الكولومبية (Coulomb Scattering)

الحل :

بما ان الاستطارة كولومية فهذا يعنى ان جميع الشا المتصادمين يتغاضلان
بتأثير الجهد التالى (بالطبع $2 = z_2 = z_1$ فى هذه الحالة) :

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{4 \pi \epsilon_0 r} \quad (7.76)$$

وبذلك تكون معادلة شرودنجر كما يلى (حيث نرمز للتعبير " $z_1 z_2 e^2 / 4 \pi \epsilon_0$ " بالرمز " γ ") :

$$\left[\nabla^2 + k^2 - \frac{2\gamma k}{r} \right] \psi(r) = 0 \quad (7.77)$$

نضع

$$\psi(r) = e^{ikz} \cdot f(r, z)$$

$$\therefore \nabla^2 f + 2ik \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{2\gamma k}{r} f = 0 \quad (7.78)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{وحيث ان}$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$f = g(r - z) \quad \text{والتعبير عن الدالة } f \text{ بصورة :}$$

$$\begin{aligned} \therefore \nabla^2 f &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial g}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial z} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} - 1 \right)^2 \right] \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \\ + \left[\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right] \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\therefore \nabla^2 f = 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \frac{z}{r} + \frac{2}{r} g$$

$$6 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{z}{r} - 1 \right) \frac{\partial g}{\partial r}$$

وبالتعويض عن " $\nabla^2 f$ " في معادلة (7.78) نجد أن :

$$(r - z) \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \left[1 - ik(r - z) \right] \frac{\partial g}{\partial r} - \gamma k g = 0$$

حيث نلاحظ أن " $ik(r - z)$ " عبارة عن :

$$ik(r - z) = ik(r - r \cos \theta) = ikr(1 - \cos \theta)$$

$$= 2 ikr \sin^2 \frac{\theta}{2} = u$$

$$\therefore u \frac{d^2 f}{du^2} + (1 - u) \frac{df}{du} + i\gamma f = 0 \quad (7.79)$$

وباتباع الأسلوب التقليدي لحل مثل هذه المعادلة التفاضلية " الهندسية " بمعنى التعبير عن الدالة " f " كمتسلسلة بدلالة المتغير " u " نجد أن :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \quad (a_0 \neq 0) \quad (7.80)$$

$$\therefore \frac{df}{du} = \sum n a_n u^{n-1} \quad (7.81)$$

$$6 \frac{d^2 f}{du^2} = \sum n(n-1) a_n u^{n-2} \quad (7.82)$$

وبالتعويض عن $df/du, f''$ و df^2/du^2 في (7.79) ونجميع الحدود الشتركة كما هو معروف في مثل هذه الحالة نحصل على :

$$a_n = \frac{(n-1-i\gamma)(n-2-i\gamma)\dots(-i\gamma)}{(n!)(n)(n-1)\dots(1)} a_0$$

$$= \frac{\left\{ \frac{\Gamma(n-i\gamma)}{\Gamma(-i\gamma)} \right\} a_0}{\left\{ \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1)} \right\} n!} \quad (7.83)$$

مع تذكرنا أن من خصائص " دالة جاما " Gamma Function " أن

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

ومذلك يكون الحل الذي نحاول الوصول اليه لمعادلة (7.77) عبارة عن (مع تذكرنا ان " $u = 2 ikr \sin^2 \frac{\theta}{2}$ " :

$$\psi(r) \sim \frac{\pi\gamma/2}{(r-z) \rightarrow \infty} \frac{A e}{\Gamma(1+i\gamma)} \left\{ e^{i(kz + \gamma \log(k(r-z)))} 1 + \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} + \right.$$

$$+ \frac{(1+i\gamma)}{(-i\gamma)} \cdot (e^{i(kr - \gamma \log(k(r-z))) / 2 ikr \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \frac{(1+i\gamma)^2}{ik(r-z)} + \dots \right] \left. \right\} \quad (7.84)$$

والحد الاول داخل القوسين يمثل موجة مستوية حدث لها تحويل بمعامل طور عبارة عن " $i \gamma \log(k(r-z))$ " بينما الحد الثانى منه بالبعد بدرجة كافية عن مركز الاستطارة يأخذ الصورة :

$$\frac{\Gamma(1 + i\gamma)}{i\Gamma(-i\gamma)} \cdot \frac{e^{-i\gamma \log(\frac{\sin^2 \theta}{2})}}{2 k \sin^2 \frac{\theta}{2}} = f_c(\theta) \quad (7.85)$$

ويمكننا فهم هذا على ان f_c تمثل موجة صادرة من مركز الاستطارة ، وقد حدث لها تحويل نتيجة التفاعل الكولومى اى ان $f_c(\theta)$ تعتبر سعة استطارة ومع تذكرنا مرة اخرى ان من خصائص دالة جاما :

$$\Gamma(1 - i\gamma) = -i\gamma \Gamma(-i\gamma) = \Gamma(1 + i\gamma)$$

$$\therefore f_c(\theta) = - \frac{\gamma}{2 k \sin^2 \frac{\theta}{2}} e^{[i\gamma \log(\sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2i \arg \Gamma(1 + i\gamma)]}$$

وهى معادلة (7.64) •

الباب الثامن

معالجة الاستطارة مع أخذ تفسير الزمن في الاعتبار

(Scattering Treatment With Time-Variation Consideration)

—

حتى الآن لم نذكر في نقاشنا عن موضوع الاستطارة عامل تغير الزمن واكتفينا بالاسلوب الذى يعتمد على حل معادلة شرودنجر لقيم موجية من الطاقة (القيم المألوفة للطاقة تقابل حلول للمجموعات العيزائية المرتبطة والتي تتميز بدالة الحالة التي تتلاشى عند ∞) وهى فى صورتها المستقلة عن الزمن . هذا الاسلوب ينقصه نقطتان هامتان : الاولى هى ان الاستطارة عبارة عن عملية ديناميكية تحدث خلال فترة زمنية تعطى منذ اللحظة التي ينطلق فيها الجسم من مصدره وينتهى كقذيفة ليصطدم بأحد الجسيمات (او اكثر) من الهدف ثم يسجل ناتج الاستطارة (او التفاعل) بكاشف مناسب . واضح ان مثل هذه العملية يكون من الافضل تفسيرها مع أخذ تغير الزمن فى الاعتبار . والنقطة الثانية هى رياضية فى طبيعتها اذ أننا رأينا ان الدوال الموجية فى ميكانيكا الكم مفروص انها عناصر فى حيز هيلبرت وتخضع لشروط المعايير ومرتبطة ارتباطا مباشرا بعملية استنتاج احتمالية تواجد الجسيمات فى هذا الحيز .

ولتبيان معالجة الاستطارة مع أخذ تغير الزمن فى الاعتبار سوف نكتفى بمناقشة

تقريب بورن (Born Approximation) ثم نتبعه بمناقشة ظاهرة الاستطارة

الرنينية (Resonant Scattering) :

المعالجة الكمية التقريبية للاستطارة تبعاً لطريقة بُسُون :

انتاء دراستنا لنظرية الاقلاق التي تعتمد على احداثى الزمن توصلنا الى علاقة سماء بالقاعدة الذهبية (The Golden Rule) والتي تعطى معدل الزيادة فى احتمالية وجود جسم مستطار وهي فى احد الحالات الكمية النهائية بعدما كان فى الحالة الابتدائية - ولنرمز لهما على الترتيب بالرمزين " l " ، " k " .

$$\frac{\partial P^l}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle l | H^{(1)} | k \rangle|^2 \rho(E) \quad (7.0)$$

ولقد وضعت l بالصورة \bar{l} لتشير الى ان كثافة الحالات $\rho(E)$ مرتبطة بحالات عديدة مجاورة لبعضها وأن $|l\rangle$ هى احداها .

بينما $\langle l | H^{(1)} | k \rangle$ تعبر عن الانتقالات الى احد الحالات التي طاقتها E_k (أى المحافظة على الطاقة) . ومع افتراض ان عنصر المصفوفة لا يتغير كثيراً على مدى مجموعة تلك الانتقالات لهذا استخدمنا العلاقة التقريبية :

$$|\langle l | H^{(1)} | k \rangle|^2 = \int_k |\langle l | H^{(1)} | k \rangle|^2 \delta(E_l - E_k) dE_l \quad (8.1)$$

وبما ان (راجع معادلة (7.3)) : $d\sigma = dN(\sigma) / I$ ، فاذا عبرنا عن كثافة الجسيمات فى الحزمة القادمة (القذائف) بالقيمة $\frac{1}{\Omega'} \cdot \Omega'$ هو حجم الحيز الناتج ، وليكن حجم العمل الذى تجرى فيه تجربة الاستطارة " Ω " علماً بأن سرعة تلك القذائف هو v فان :

$$I = \frac{1}{\Omega'} \cdot v \cdot \text{عدد الجسيمات القادمة تجاه مركز الاستطارة فى الثانية}$$

عبر وحدة المساحات

$$= \frac{1}{\Omega'} \cdot \frac{\hbar k}{A} \quad (8.2)$$

بينما نعبر عن الجسم القذيفة بالدالة $\psi_k^{(0)} = \frac{1}{\Omega} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ والجسيم المستطارد بالدالة $\psi^{(0)} = \frac{1}{\Omega} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}}$ على أساس ان الحالات النهائية نتيجة الاستطارة جميعها ملاصقة لتلك الدالة $\psi^{(0)}$. وتذكرنا ان المعدل الذى يُسجل به الكثافة الجسيمات المستطارة $dN(0)$ " ماهو الا معدل الاحتمالية كما هو معطى فى معادلة (7.26) . بينما كانت الحالات ρ عبارة عن :

$$\rho = \frac{dN_f}{dB} = \frac{dN_f}{dp} \cdot \frac{dp}{dB}$$

$$= \left(\frac{\Omega' p^2 \cdot d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \right) \cdot \left(\frac{\mu}{p} \right) \quad (8.3)$$

إذا نحصل على التعبير الخاص بالقطع المستعرض التفاضلى $\sigma(0)$ للاستطارة على الوجه التالى :

$$\sigma(0) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\mu \Omega'}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \cdot \left| \langle l | H^{(1)} | k \rangle \right|^2 \quad (8.4)$$

وهذا يعنى ان سعة الاستطارة $f(0)$ عبارة عن

$$f(0) = \pm \frac{\mu \Omega'}{2\pi\hbar^2} \left| \langle l | H^{(1)} | k \rangle \right|^2$$

ودائما تختار العلامة المألوفة (-) أى أن :

$$f(0) = - \frac{\mu \Omega'}{2\pi\hbar^2} \left| \langle l | H^{(1)} | k \rangle \right|^2 \quad (8.5)$$

وسبب هذا الاختيار هو ان تكون هذه العلاقة (8.5) متفقة مع مثيلتها عند

استنتاج التعبير الخاص بالسعة $f(0)$ على أساس ان الاستطارة ناتجة عمن ما يشبه حيود الموجات القادمة تجاه عائق موجود عند مركز الاستطارة .

والفكرة السيرة للتقريب الذى افترضه بورن بالنسبة لاستخدام هذه العلاقة التى
توصل اليها عام (١٩٢٦) هى ان دالة الموجة الواقعية عندما تكون قريبة جدا من
مركز الاستطارة تتميز بعدم اختلافها كثيرا عما تكون عليه فى غياب قوة التفاعل التى
تتسبب فى الاستطارة . معنى ذلك امكانية استخدام الدوال السابق الاشارة اليها
 $\psi_k^{(0)}$ و $\psi_k^{(0)}$ لتمثيل الحالة الابتدائية واحدى الحالات النهائية - على
التوالى . وعلى ذلك اذا كانت هاميلتونية التفاعل $\hat{H}^{(1)}$ تمثل بالجهد المتناصل
كربا $V(r)$ نتجت سعة الاستطارة على النحو التالى (راجع معادلة (1.14) ،
ولاحظ اختفاء حجم الحيز المتاح من النتيجة النهائية كما هو متوقع فيزيائيا :

$$\begin{aligned} f(0) &= - \frac{\mu \Omega'}{2 \pi \hbar^2} \langle l | H^{(1)} | k \rangle \\ &= - \frac{\mu \Omega'}{2 \pi \hbar^2} \int \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega'}} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \right) V(r) \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega'}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \right\} d\tau \\ &= - \frac{\mu}{2 \pi \hbar^2} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} V(r) d\tau \\ &= - \frac{\mu}{2 \pi \hbar^2} \int e^{i(k-k')r \cos \theta'} V(r) [r^2 \sin \theta' dr d\theta' d\phi] \\ &= - \frac{\mu}{2 \pi \hbar^2} \int_0^\infty r^2 V(r) dr \cdot \int_0^\pi \sin \theta' e^{i(k-k')r \cos \theta'} d\theta' \cdot \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= - \frac{2\mu}{\hbar^2(k-k')} \int_0^\infty r V(r) \sin(k-k') r dr \quad (8.6) \end{aligned}$$

• وهذا هو التعبير الخاص بتقريب بورن لحساب سعة الاستطارة $f(0)$

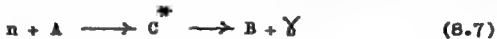
الاستطارة الرنينية :

في كثير من الاحيان فان التجارب العملية توضح نتائجها ان المقطع المستعرض للتفاعل ما (سواء على المستوى الذرى مثل استطارة الكترونات بواسطة ذرات الهيليوم — او على المستوى النووي مثل استطارة ميزونات باى بواسطة البروتونات او النيوترونات) يتميز بصفة رنينية — بمعنى ان قيمة المقطع المستعرض التجريبية تصل الى قيمة قصوى ومقابلة لقيمة محددة — من طاقة الحركة للجسيمات (مثلما في حالة النيوترونات البطيئة) او الطاقة الكلية المتاحة للتفاعل في نظام مركز الكتلة (مثلما في حالة تولد الجسيمات الاولية المعروفة باسم " جسيمات الرنين " كجسيمات أوميجا وجسيمات ρ . مثل هذه التفاعلات الرنينية وُجد انها يمكن فهمها في اطار اساسيات نظرية الاقلاق التي تأخذ احداثى الزمن في الاعتبار حيث تؤدي الى علاقة رياضية تُفسر العديد من خصائص تلك التفاعلات . هذه العلاقة تعرف بعلاقة برايت — فيجنر وسوف نحاول تبسيط كيفية التوصل اليها :

(Breit-Wigner Relation)

علاقة برايت فيجنر :

مرة اخرى نبدأ بمعادلة القاعدة الذهبية التي توصلنا اليها اثنا مناقشتنا لنظرية الاقلاق . ولتحديد التفاضل الفيزيائي نحاول ان نتدارس هذه المعالجة على تفاعل نيوترونى نشير اليه بالمعادلة التالية :



هذا التفاعل يمثل التقاط نيوترون " بطى " بواسطة نواة " A " لتنتج نواة مركبة " C^* " غير مستقرة والتي تتأكل بدورها بعد متوسط عمر مميز لها — فينبعث فوتون " جاما (γ) وترتد نواة " B " .

مثل هذه التواء المركبة الغير مستقرة " G^* " تعنى حالة نووية وسطية تتميز بمستويات طاقة محددة تربط بين الحالات الابتدائية (وهذه تتميز " بشرط متصل " من الطاقة) والحالات النهائية (وايضا تتميز بشرط متصل من الطاقة خاص بها) . من وجهة نظر ميكانيكا الكم هذا الاتصال يمثل عنصر مصفوفة تفسر اليه بالرمز " H_{ac} " وعصر مصفوفة آخر " H_{bc} " . حيث " H_{ac} " يصل بين " G^* " والمجموعة الفيزيائية " $n + A$ " بينما " H_{bc} " يصل بين " G^* " والمجموعة الفيزيائية " $B + \gamma$ " . هذا على اساس احوال أى من العناصر الاخرى مثل " H_{aa} " (الذى يربط الحالات الابتدائية بنفسها) وكذلك " H_{bb} " الذى يربط بين الحالات الابتدائية والحالات النهائية دون تكون الحالة الوسطية " G^* " (اى التفاعل المباشر) .

لنرمز اذا لمجموعة السمات التى تميز المجموعة الابتدائية ($A + n$) بالرمز a_a بينما a_b نرمز لتلك التى تميز المجموعة ($B + \gamma$) والسعة a_c تميز التواء المركبة " G^* " (سوف يفترض ان هناك حالة كمية وسطية مفردة ذات اهمية للتفاعل الذى ندرسه) .

بتطبيق القاعدة الذهبية نلاحظ ان :

$$\begin{aligned} \dot{a}_a &= \frac{1}{i\hbar} \int u_a^* H^{(1)} u_c d\tau \cdot e^{\frac{i(E_a - E_c)t}{\hbar}} a_c \\ &= \frac{1}{i\hbar} H_{ac} e^{\frac{i(E_a - E_c)t}{\hbar}} \\ \dot{a}_b &= \frac{1}{i\hbar} H_{bc} e^{\frac{i(E_b - E_c)t}{\hbar}} \cdot a_c \end{aligned}$$

$$i \dot{a}_c = \frac{1}{i\hbar} \sum_a H_{ca} e^{\frac{i(E_c - E_a)t}{\hbar}} a_a + \frac{1}{i\hbar} \sum_b H_{cb} e^{\frac{i(E_c - E_b)t}{\hbar}} a_b$$

مع ملاحظة انه عند اللحظة " $t = 0$ " فان :

$$a_{a_0} = 1 \quad (\text{وهذه يتم اختيارها تبعاً لظروف التجربة})$$

$$a_{a_0} = 0 \quad , \quad a \neq a_0$$

$$a_c = a_b = 0 \quad , \quad \dot{a}_a = \dot{a}_b$$

بينما a_c تزداد مع مرور الزمن ولذلك " $\dot{a}_c \neq 0$ " موضحة عملية بنسبة
احتمالية ان الموجة في الحالة الوسطية C^* . وسجود ان تصبح a_c اكبر
من الصفر تبدأ كل من a_a و a_b في الازدياد . ولتوضيحه a_c تدريجياً
حتى اصبحت " $a_c = 1$ " ونستطيع C^* ان تتأكل الى الموجة $(n + A)$
او الى الموجة $(B + \gamma)$ باحتمالية انتقال تبعاً للملاقاة :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{C^*} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{km}|^2 \frac{dn}{dE}$$

وعلى ذلك فان احتمالية الانتقال الى $(B + \gamma)$ هي : $\frac{1}{(n+A)} \ll \frac{1}{(B+\gamma)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_\gamma} &= \frac{2\pi}{\hbar} |H_{bc}|^2 \cdot \frac{4\pi P_f^2}{8\pi^3 \hbar^3 \nu_\gamma} \\ &= \frac{1}{\pi \hbar^4} |H_{bc}|^2 \cdot \frac{\hbar^2 \omega^2}{c^3} \end{aligned}$$

بينما احتمالية الانتقال الى $(A + n)$ هي :

$$= \frac{1}{\tau_n} = \frac{n^2}{\hbar^4} |H_{ac}|^2 \tau_n$$

(مع افتراض ان الدوال الموجية مُعايرة - داخل حيز يساوى الوحدة) .

وما ان احتمالية شغل الحالة C عبارة عن :

$$|a_c|^2 = e^{-\frac{t}{\tau_n}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_y}} = e^{-t(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_y})}$$

$$\therefore a_c = e^{-\frac{t}{2}(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_y})}$$

$$\therefore \frac{da_c}{dt} = - \left(\frac{1}{2\tau_n} + \frac{1}{2\tau_y} \right) a_c$$

وحيث أن - من مبدأ الاتحاديد لها يتخرج -

$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$$

حيث $\Delta t = \tau$ $\Delta E = 2\Gamma$ وحيث Γ يمثل شتتفا انتساع
المخفى الرنينى ضد شتتفا ارتطافه .

$$\therefore \frac{\Gamma_n}{\hbar} = \frac{\Gamma_1}{2\tau_n} , \quad \frac{\Gamma_y}{\hbar} = \frac{1}{2\tau_y}$$

$$\therefore \Gamma_n + \Gamma_y = \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_y} \right]$$

ولكن : $\frac{1}{\tau_n}$ = احتمالية التآكل الى الحالة (A + n)

$\frac{1}{\tau_y}$ = احتمالية التآكل الى الحالة (B + y)

اذا الاحتمالية الكلية في وحدة الزمن لتآكل الحالة الوسطية

$$\therefore \left[\frac{1}{2\tau_n} + \frac{1}{2\tau_y} \right] = (\Gamma_n + \Gamma_y) / \hbar = \frac{\Gamma}{\hbar}$$

$$\therefore \frac{d a_c}{dt} = - \left[\frac{1}{2\tau_n} + \frac{1}{2\tau_y} \right] a_c = - \frac{\Gamma}{\hbar} \cdot a_c$$

ونلاحظ انه في نفس الفترة الزمنية التي تتآكل خلالها هذه الحالة الوسطية يحدث تولد لها من جراء الحالة (A + n) بمعدل عبارة عن :

$$\frac{d a_c}{dt} = - \frac{\Gamma}{\hbar} a_c + \frac{1}{i\hbar} H_{ca_0} e^{\frac{i(E_c - E_{a_0})t}{\hbar}} \cdot a_{a_0}$$

حيث $a_{a_0} = 1$ " إذ أن جميع الحالات " مشغولة "

$$\therefore a_c = \frac{- \frac{1}{\hbar} H_{ca_0} e^{\frac{i(E_c - E_{a_0})t}{\hbar}} - e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}}{\frac{1}{\hbar} (E_c - E_{a_0}) + \frac{\Gamma}{\hbar}}$$

وبعد حوالي 10^{-13} " من الثانية تصبح $e^{-\frac{\Gamma}{\hbar} t}$ " مساوية للصفر تقريبا

$$\therefore |a_c|^2 = \frac{|H_{ca_0}|^2}{(E_c - E_{a_0})^2 + \Gamma^2}$$

ومعنى هذه النتيجة ان عدد التفاعلات

التي تؤدي الى (B + y) فسي

الثانية الواحدة عبارة عن :

$$\begin{aligned}
 a_c^2 \cdot \frac{1}{\tau_Y} &= |a_c|^2 \cdot \frac{2\sqrt{\gamma}}{\hbar} \\
 &= \frac{|H_{ca_0}|^2}{(E_c - E_{a_0})^2 + \Gamma^2} \cdot \frac{2\sqrt{\gamma}}{\hbar} \\
 &= \sigma_{(n, \gamma)} \cdot v_n
 \end{aligned}$$

ولكن

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{m_n^2}{\hbar^4} |H_{ac}|^2 v_n = \frac{2\gamma_n}{\hbar}$$

$$\therefore |H_{ac}|^2 = \frac{2\pi \hbar^3 \Gamma_n}{\hbar v_n \cdot m_n^2}$$

$$\therefore \sigma_{n, \gamma} = \frac{4\pi \hbar^2 \Gamma \Gamma_n}{v v_n \cdot m_n^2} \cdot \frac{1}{\Gamma^2 + (\delta E)^2}$$

ولكن $\Gamma_n^R = \Gamma_n$ عندما تكون سرعة النيوترون v_n مساوية v_R عندما تكون طاقة النيوترون هي الضبوطة لحدوث الرنين (حرف R يشير للرنين) :

$$\therefore \frac{\Gamma_n}{v} = \frac{\Gamma_n^R}{v_R}$$

$$\therefore \sigma_{n, \gamma} = 4\pi \chi \chi_R \frac{\Gamma_\gamma \Gamma_n^R}{\Gamma^2 + (\delta E)^2} \quad (8.8)$$

كما أشرنا في البداية فإن هذه العلاقة (برأيت - قُجتر) تحقق جميع المشاهدات التجريبية الخاصة بالمقطع المستعرض للتفاعلات الرنينية كما أنها فسرت العديد من المشاهدات المرتبطة بقولك الجسيمات الرنينية .

كيفية تعيين كمية الحركة المغزلية لجسيم بواسطة قياس القطع المستعرض للاستطارة المشتركة

فيها :

لنفرض ان لدينا تفاعل بين قذيفة a وهدف A لينتج جسيمين b و B عن طريق تكون حالة وسطية رنينية C^* . مُعبر عنه بالمعادلة :



وان كمية التحرك الزاوى لكل منها (ويحتوى كذلك على حركته المغزلية الداخلية) هي I_a و I_A و I_b و I_B . بينما يتم التفاعل نفسه عن طريق الانتقال من حالة ابتدائية متميزة بكمية تحرك زاوى ℓ لتكوين الحالة المركبة (الوسطية) الرنينية C^* التى تتميز بكمية تحرك زاوى كلى J (فى المعتاد J و I_a و I_A يُشار الى كل منها بالحركة المغزلية للجسيم المقابل) ولا يُتوقع بالطبع ان كل تصادم بين a و A يمكن ان يؤدي الى حالة حركتها المغزلية تساوى J . وعلى فرض ان جسيمات القذائف والهدف غير مستقطبة (Unpolarized) فان احتمالية تواجد اى من حالات الحركة المغزلية تساوى الاخرى . واذا ما تذكرنا ان الوجوه المستوية التى تمثل جسيم القذيف عبارة عن تطابق غير متوافق لعدد $(2\ell + 1)$ موجه جزئية لكل منها عدد كى m_ℓ (راجع معادلة (١)) فعنى ذلك

ان العدد الناتج للحالات الابتدائية يكون عبارة عن :

$$(2 + 1) (2 I_a + 1) (2 I_A + 1)$$

تواجد تساوى الاخرى . ولكن هذا العدد الناتج يُختلص منه فقط العدد $(2J + 1)$ الذى يقابل عدد الحالات السكة للحالة الرنينية . وبذلك تكون

احتمالية ان اى من جسيمات القذائف يُنتج هذه الحالة الرنينية هو النسبة $(2 + 1) (2 I_a + 1) (2 I_A + 1) / (2J + 1)$. ونفس المنطق

بالنسبة للتفاعل العكسى . واذا ما تذكرنا ان كثافة الحالات الكمية فى الحيز الناتج للتفاعل هو :

$$\frac{dn}{dB} = (2 I_b + 1)(2 I_B + 1) \cdot \frac{4 \pi p_b^2 \Omega}{(2 \pi \hbar)^3 v_b}$$

إذا يمكننا التعبير عن المقطع المستعرض لهذا التفاعل كما يلي :

$$\sigma_{(a,A) \rightarrow (b,B)} = \frac{p_b^2 \Omega'}{\pi \hbar^4 v_a v_b} |H'_{ab}|^2 (2 I_b + 1)(2 I_B + 1)$$

وبالمثل بالنسبة للمقطع المستعرض للتفاعل العكسي :

$$\sigma_{(b,B) \rightarrow (a,A)} = \frac{p_a^2 \Omega'}{\pi \hbar^4 v_a v_b} |H'_{ba}|^2 (2 I_a + 1)(2 I_A + 1)$$

وبما ان المعاملة الخاصة بالانقلاب $H^{(1)}$ هي عرجونية اذا $|H_{ba}|^2$ يساوي $|H_{ab}|^2$

وبذلك نحصل على :

$$\frac{\sigma_{(a+A \rightarrow b+B)}}{\sigma_{(b+B \rightarrow a+A)}} = \frac{p_b^2}{p_a^2} \cdot \frac{(2 I_b + 1)(2 I_B + 1)}{(2 I_a + 1)(2 I_A + 1)} \quad (8.9)$$

وهذه هي العلاقة التي كثيرا ما تستخدم للتعرف على كمية الحركة المغزلية لأي من الجسيمات المتفاعلة بمعلومية ما يخص الجسيمات الاخرى المشتركة في التفاعل . وذلك بمجرد الحصول على القيمتين التجريبتين للمقطع المستعرض لكل من التفاعل والتفاعل العكسي .

مثال محلوس (٨ - ١) :

استنتج مايساويه المقطع المستعرض للاستطارة العرنة لحزمة الكثرنية طاقسة حركتها ٥٠ الكرون فولت بواسطة هدف ايدروجيني ذراع في الحالة الارضية لها , $\theta = 60^\circ$.

الحل :

بما ان طاقة الحركة للحزمة الالكترنية القادمة تجاه الهدف الايدروجيني عاليةة يمكن تطبيق تقريب بورن بمعنى ان جهد التفاعل يكون حينئذ صغيرا لدرجة اغتراس

ان دالة الحالة الفعلية الخاصة بالاستطارة ψ يمكن تقريبها واستبدالها بدالة الحالة الاصلية الغير متأثرة بجهد الاغلاق . وما ان الاستطارة مرنه معني ذلك ان الهدف الايدروجيني كان في حالة عدد الكم لها 0 وانتقل الى حالة عدد الكم لها ايضا صفر . وما ان دالة الحالة لذرة الايدروجين عموما عبارة عن :

$$\psi_{nlm}(\rho) = R_{nl}(\rho) \cdot Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$= \{R_{nl}(\rho)\} \cdot \left\{ \left[\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^2 \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi} \right\}$$

إذا الحالة الارضية ψ_{10} هي :

$$\psi_{10} = \{ R_{10}(\rho) \} \cdot \left\{ \left[\frac{0+1}{4\pi} \cdot \frac{0!}{0!} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot P_0^0(\cos \theta) \cdot e^0 \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 e^{-\frac{\rho}{a_0}} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi} \times 1 \times 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_0^3 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{\rho}{a_0}} = \chi_0(\rho)$$

حيث a_0 نصف القطر " بوهر " .

وما ان سعة الاستطارة تبعاً لتقريب بورن عبارة عن :

$$(\Phi_{km} - \Phi_{k,p}) = - \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int dx \int e^{-il \cdot x} \chi_p^*(\rho) \cdot v(x, \rho) e^{ik \cdot x} \chi_m(\rho) d\rho$$

وأن الاستطارة في هذه الحالة " مرنه "

$$\begin{aligned} \therefore r(\Phi_{k0} \rightarrow \Phi_{k',0}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} \\ &\cdot \int V(r, \rho) |\chi_0(\rho)|^2 d\rho \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} dr V_{00}(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{00} &= \int V(r, \rho) |\chi_0(\rho)|^2 d\rho \\ &= \left\{ -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |r-\rho|} \right\} |\chi_0(\rho)|^2 d\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int |\chi_0(\rho)|^2 \frac{1}{|r-\rho|} d\rho &= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^\infty \rho^2 d\rho \cdot \int_{-1}^{+1} d(\cos \Theta) \cdot \\ &\cdot \int_0^{2\pi} d\phi \cdot e^{-\frac{2\rho}{a_0} (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \Theta)^{-1/2}} \\ &= -\frac{2}{a_0^3 r} \int_0^\infty \rho \left| (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \Theta)^{1/2} \right|_{-1}^{+1} e^{-\frac{2\rho}{a_0}} d\rho \\ &= -\frac{2}{a_0^3 r} \left\{ \int_0^r \rho \left| (r-\rho) - (r+\rho) \right| e^{-\frac{2\rho}{a_0}} d\rho + \right. \\ &\left. + \int_r^\infty \rho \left| (\rho-r) - (\rho+r) \right| e^{-\frac{2\rho}{a_0}} d\rho \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

$$\therefore V_{00} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

وبذلك تصبح سعة الانتطارة كما يلي :

$$\begin{aligned} f(\Phi_{k0} \rightarrow \Phi_{l0}) &= \frac{2me^2}{4\pi\hbar^2(k-k')} \int_0^\infty \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{r}\right) e^{-\frac{2r}{a_0}} \sin(k-k')r \, dr \\ &= \frac{2me^2 \left(\left(\frac{8}{a_0^2}\right) + (k-k')^2\right)}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 \left(\left(\frac{4}{a_0^2}\right) + (k-k')^2\right)^2} \end{aligned}$$

حيث هنا :

$$(k-k')^2 = k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \sigma(\theta) = \left[\frac{2me^2 \left(\frac{8}{a_0^2} + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 \left(\left(\frac{4}{a_0^2}\right) + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2} \right]^2 \quad (8.10)$$

وفي هذا المثال :

$$\theta = 60^\circ, \quad a_0 = 0.523 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad \text{أيضا}$$

$$k = 3.84 \times 10^{10} \text{ m}^{-1},$$

$$\therefore \sigma(60^\circ) = \left[\frac{2.069 \times 10^{-46}}{4.258 \times 10^{-34}} \right]^2 = 0.236 \text{ barn}.$$

شال (٨-٢) :

احسب المقطع المستعرض للتفاعل الذى يمثل التقاط نيوترون بطى " (نيوترون حرارى) بواسطة بروتون (نواة ذرة الايدروجين) لينتج فى النهاية نـسـواء " ديوترون Deuteron وينطلق فوتون جاما $(\gamma) = 2.11 \text{ Mev}$.

الحل :

فى البداية يلاحظ ان هذا التفاعل يتميز بأنه :

- يختص بثلاث جسيمات اولية " نيوترون - بروتون - فوتون " بجانب ايسط نسواء مركبة وهى نواة الديوترون .

- الحالة الابتدائية يشغلها اثنين من القسيمونات (لان الحركة المغزلية الذاتية لكل منهما عارة عن $\frac{1}{2} \hbar$) بينما الحالة النهائية يشغلها اثنين من البوزونات (لان الحركة المغزلية للديوترون يساوى الوحدة والحركة المغزلية للفوتون ايضا يساوى $\frac{1}{2} \hbar$) .

- بما ان النيوترون القذية طاقة حركته صغيرة (حوالى 0.25 eV°) فانه

يكتفى بالتعامل مع موجته السطاحة كريا (S-Wave) وذلك لان الموجات ذات عدد الكم $\ell > 0$ يصبح كمية تحركها الزاوى كبير بالنسبة للهوتسون الهدف لدرجة ان النيوترون القذية يصبح معامل تعادله " b " اكبر من مدى القوة النووية (Nuclear Force Range) - على سبيل المثال

اذا فرض ان طاقة حركة النيوترون 0.25 eV الكرون فولت فان سرعته تكسبون 2×10^7 متر فى الثانية وعلى ذلك اذا فرض ان $\ell = 1$ فان معامل

التصادم b يساوى 10^{-10} متر . اى ما عدا الف مرة قدر مدى القسوة

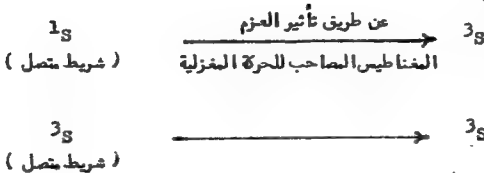
النوية (والتالى لا يكون هناك اى تفاعل لمثل هذه الموجات مع الهوتسون

الهدف) . وعلى ذلك يكون منه كمية حركة النيوترون الزاوية ناتج فقط

من حركته المغزلية $(\hbar/2)$ وفي نفس الوقت الحركة المغزلية للبروتون الهدف $(\hbar/2)$ • وبذلك يكون الاتجاه المحصل الذي يمثل الطاقة الابتدائية للتفاعل الموضح هو $1\hbar$ أو 0 •

أما بالنسبة للحالة النهائية فيلاحظ أن نواة الديوترون حركتها المغزلية $(1\hbar)$ كما أشرنا منذ قليل • وهذا نتيجة تقارن الحركة المغزلية لكل من الجسيمين الأوليين المكونين لها (البروتون s_p والنيوترون s_n) مع ملاحظة أن الحركة المدارية $l = 0$ وأن التقارن يحدث بين $s_p = +\hbar/2$ و $s_n = +\hbar/2$ لتنتج الحالة الكلية 3S_1 لنواة الديوترون (s لأن $l = 0$ ، 1 يشير إلى عدد الحالات الناتجة نتيجة لعدد الكم الكلي 1) بينما التقارن بين $s_p = +\hbar/2$ و $s_n = -\hbar/2$ غير متاح هنا في حالة الديوترون لأن التقارن الذي يؤدي إلى عدد كم كلي يساوي $0\hbar$ لا ينتج عنه حالة مرتبطة مثل نواة الديوترون •

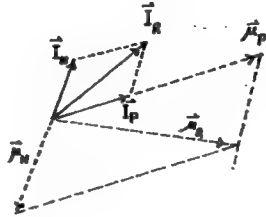
على هذا الأساس فإن الانتقالات الكمية الممكنة التفكير فيها بالنسبة لهذا التفاعل $D(p, n)$ هي :



ولكن خاصية التبادلية لدوال الحالة ينتج عنها عدم إمكانية تحقيق الانتقال الثاني لانهما (الحالة الابتدائية والحالة النهائية) ينتجان لقيم إيجينية مختلفة •

وحيث ان اساسيات ميكانيكا الكم المرتبطة بخاصية التماثل لانعكاس واحدات قياسات الحيز (Parity) تدعو الى استبعاد ان يتم التفاعل بالنسبة للانتقال $(S \rightarrow S)$ عن طريق مشارة المزدوجات الكهربائية (Electric Dipoles) لذلك فـ ان التفاعل الاول يتم كما هو شار عاليه عن طريق مشارة المزدوجات المغناطيسية والشكل التالي يوضح ذلك كما يلي :

رسم توضيحي لدوران عزم المزدوج المغناطيسي المحصل μ_R حول محور الحركة المغزلية الناتج عن تقارن الحركة المغزلية للنيوترون القديمة مع الحركة المغزلية للبروتون الهدف (الحالة الابتدائية للتقاء)
 $(n(p, \lambda) D)$



وفي هذا الشكل التوضيحي فان :

$$I_n = \frac{1}{2} \hbar = \text{الحركة المغزلية للنيوترون}$$

$$\mu_n = \mu_N \quad \text{إذ أن } I_n \text{ عكس اتجاهه عكس اتجاهه} \quad \text{سالب (ماجنيتون نيوى -1.9)}$$

$$I_p = \frac{1}{2} \hbar = \text{الحركة المغزلية للبروتون}$$

$$\mu_p = \mu_N \quad \text{إذ أن } I_p \text{ نفس اتجاهه في نفس اتجاهه} \quad \text{موجب ويساوى +2.7 ماجنيتون نيوى}$$

$$I_R = \text{الحركة المغزلية المحصلة للبروتون والنيوترون}$$

(Resultant Angular Momentum)

$\mu_R =$ (Resultant Magnetic Moment) العزم المغناطيسى المحصل

وعلى هذا الاساس نطبق العلاقة الخاصة " بمعدل الانتقال " في نظرية الاطلاق على هذا التفاعل الذى وضع الان انه يتم عن طريق تفاعل المزدوج المغناطيسى

$$\frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} |H(1)|^2 \quad \text{وتساوى :}$$

$$= \frac{4}{3} \frac{\omega^3}{\hbar c^3} |\mu_{F,1}|^2 \quad (8.12)$$

حيث

$$= \frac{\text{طاقة الانتقال من الحالة الابتدائية الى الحالة النهائية}}{\hbar}$$

$$= \frac{2.23 \text{ Mev}}{\hbar} \quad (8.13)$$

طاقة الربط للنواة الديوترون (على اساس ان طاقة الحركة للنيوترون القذيفة صغير بالنسبة لها)
 \hbar

$|\mu_{F,1}| =$ عنصر المصفوفة التى تربط الحالة الابتدائية 1 (Initial) بالحالة النهائية μ (Final) عن طريق تأثير عزم المزدوج المغناطيسى

ويلاحظ ان الحالة الابتدائية للمجموعة (n.p) يمكننا التعبير عنها كما يلى :

$$\psi_1 = \psi_{(1s)} = \frac{1}{r} \left[\frac{(+ -) - (- +)}{\sqrt{2}} \right] \quad (8.14)$$

بينما الحالة النهائية للمجموعة (d, λ) يمكننا التعبير عنها بالصورة التالية :

$$\psi_f = \psi_{(3S)} = \frac{u(r)}{r} \cdot \left[\begin{array}{c} (++) \\ \frac{\{[(-+) + (-+)]\}}{\sqrt{2}} \\ (--) \end{array} \right] \quad (8.15)$$

وفيها

(+ -) تعنى ان جزء الدالة الموجية الخاصة بالحركة المغزلية ترمز الى ان الحركة المغزلية للبروتون اتجاها الى اعلى \uparrow (+) بينما الحركة المغزلية للنيوترون اتجاها الى اسفل (-) .. وهكذا بالنسبة لباقي الرموز .

بينما جزء الدالة الموجية الخاصة باحداثيات الحيز (r) نلاحظ هنا انها لا تعتمد على الزوايا (θ, ϕ) بما اننا نتعامل مع دوال تتميز بمثل كرى ($l = 0$) وهي هنا عبارة عن $j(r)/r$ بالنسبة للحالة الابتدائية بينما تماثل $u(r)/r$ بالنسبة للحالة النهائية وهذه هي الحل الخاص بالتواء الديوتريون المقابلة للجهد البئر $V = -21 \text{ Mev}$ الخاص بتفاعل البروتون والنيوترون للحالة الثلاثية 3S .

اما $j(r)/r$ فهي الجزء الذى يعطينا من الوجهة المستوية التسي تمثل النيوترون القادم تجاه الهدف والتى رأينا قبل ذلك انها عبارة عن (راجع معادلة (7.75)) :

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= \sum_l (2l+1) i^l \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) P_l(\cos \theta) \\ &= \left(\frac{\pi}{2kr}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(kr) \end{aligned} \quad (8.16)$$

وتتضح نتائج التجارب الخاصة باستقطار النيوترونات بواسطة البروتونات
ان دالة بسل التي نحن بصدد ها عبارة عن

$$j(x) = \frac{1}{x} \sin (kr + |a|) \sim r + |a_1| \quad (8.17)$$

بقي لدينا اذاً أن نحسب عنصر المصفوفة $\vec{\mu}_{F,i}$ حيث :

$$\vec{\mu}_{F,i} = \int \psi_F \vec{\mu} \psi_i d\tau \quad (8.18)$$

وفيها متجه المزدوج المغناطيسي عبارة عن

$$\begin{aligned} \vec{\mu} = & \mu_p (\sigma_x^p \hat{i} + \sigma_y^p \hat{j} + \sigma_z^p \hat{k}) \\ & + \mu_N (\sigma_x^N \hat{i} + \sigma_y^N \hat{j} + \sigma_z^N \hat{k}) \end{aligned} \quad (8.19)$$

حيث $\sigma_x^p \dots$ الخ عبارة عن عمليات باؤلي (Pauli Operators) للحركة
المنزلية (راجع صفحة ٥٦) . ومن صفات هذه العمليات انها تؤثر على الدوال
الموجبة الخاصة بالحركة المنزلية للبروتون $\left(\frac{1}{0}\right)_+ = (p)_+$ وللنيوترون
 $\left(\frac{1}{0}\right)_+ = (n)_+$ على النحو التالي (مع ملاحظة ان العوامل σ_x^p σ_x^N σ_y^p σ_y^N σ_z^p σ_z^N تؤثر فقط على دوال البروتون تارة ودوال النيوترون كما هي .
بينما σ_x^p σ_y^p σ_z^p σ_x^N σ_y^N σ_z^N تؤثر فقط على دوال النيوترون تارة ودوال البروتون
كما هي :

$$\sigma_x^p (p)_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (p)_- \quad (8.20)$$

$$\sigma_x^p (p)_+ (n)_- = (p)_- (n)_- = (-) \quad (8.21)$$

أى أن

$$\sigma_x^p (+ -) = (- -) \quad (8.21)$$

وهكذا •

وعلى هذا الأساس لنحسب على سبيل المثال المركبة $(\mu_{f1})_z$:

$$\begin{aligned} |(\mu_{f1})_z|^2 &= \left| \int \psi_f^* (\mu_p \sigma_x^p + \mu_N \sigma_x^N) \psi_1 d\tau \right|^2 \\ &= (\mu_p - \mu_N)^2 \left\{ \int_0^\infty j(r) u(r) \cdot 4\pi dr \right\}^2 \quad (8.22) \end{aligned}$$

وحيث انه لا يوجد أى تفضيل احصائى بين المحاور الثلاث

$$\therefore |(\mu_{f1})_x|^2 = |(\mu_{f1})_y|^2 = |(\mu_{f1})_z|^2 \quad (8.23)$$

$$\therefore |\mu_{f1}|^2 = 3 |(\mu_{f1})_z|^2 \quad (8.24)$$

$$\therefore \sigma_{[n(p, \gamma) d]} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16 \cdot \pi^2 \omega^2}{\hbar c^3} (\mu_p - \mu_N)^2 \left[\int_0^\infty j(r) u(r) dr \right]^2$$

حيث ادخل المعامل $(1/(1/4))^2$ نتيجة ان ربع الشرط المتصل من الحالات الابتدائية هو فقط الذى يشاركنه فى التفاعل بين النيوترون والبروتون الهدف وهو النسبة التى تمثل الحالات المفردة المتأثرة كليا:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} j(r) u(r) dr &= \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_0^{\infty} (|a_1| + r) e^{-kr} dr \\ &= \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \left(\frac{|a_1|}{k} + \frac{1}{k^2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{[n(p,\gamma)d]} = \frac{1}{V} \cdot \frac{16 \pi^2 \omega^3}{\hbar c^3} (\mu_p - \mu_N)^2 \cdot \frac{k}{2\pi} \left(\frac{|a_1|}{k} + \frac{1}{k^2} \right)^2$$

وباستخدام قيمة متجه العدد الموجى على أنه $k = 2.26 \times 10^{14} \text{ m}^{-1}$ بينما

قيمة " طول الاستطارة (Scattering Length) على أنه :

$$a_1 = -2.32 \times 10^{-14} \text{ m}$$

$$\therefore \left[\sigma_{[n(p,\gamma)d]} \right]_{th.} = \frac{6.4 \times 10^{-22}}{V} = \frac{6.4 \times 10^{-22}}{2.2 \times 10^3}$$

$$= 0.29 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 0.29 \text{ barns} \quad (8.25)$$

يمتد القياسات التجريبية لهذا التفاعل تؤدي الى النتيجة العملية التالية

$$\left[\sigma_{[n(p,\gamma)d]} \right] = (0.30 \pm 0.011) \text{ barns} \quad (8.26)$$

مثال (٨ - ٣) :

فسر السبب في ان التواء الديوترون في الحالة الارضية لها (Its Ground

State) وهي الحالة الوحيدة المرتبطة التي تجمع بين بروتون واحد ونيوترون واحد -

عبارة عن حالة مفردة (Singlet State) في حيز الحركة المفزلية النظرية .

الحل :

الحالة الأرضية للديوترون عبارة عن خليط من 3S_1 و 3D_1 ومعنى ذلك أن خليط من " $l = 0$ " و " $l = 2$ " وبالتالي فإن الجزء من الدالة الموجية الخاص بأحداثيات الحيز (x, y, z) يتصف بالتناقل حيث أن $(-1)^0 = 1$ ، $(-1)^2 = 1$ " يساوى كل منهما " $+1$ أى زوجى (EVEN) .

بجانب ذلك فإن الجزء من نفس الدالة الموجية للديوترون الخاص بالحركة المغزلية التى توضح النتائج العملية أنها " 1 ± 1 " يتصف أيضا بالتناقل بالنسبة لتبادل الحركة المغزلية للنوكليونات المكونين للديوترون .

ولكن مبدأ الاستبعاد لبأولى (Pauli Exclusion Principle) يوضح وجوب أن تكون الدالة الموجية بأكملها (ap) والتي تمثل هذه المجموعة الفيزيائية (الديوترون) المكونة من اثنين من النيوكلونات - غير متماثلة بالنسبة لتبادل النيوكلونين المكونين لها وبالتالي يجب أن يكون متجه الحركة المغزلية النظرية لأحدهما فى اتجاه عكس المتجه الخاص بالآخر . أى أن الديوترون يجب أن يتميز بما يلى :

$$\tau = \tau_z = 0 \quad (8.27)$$

أى حاله مفردة فى حيز الحركة المغزلية النظرية .

مثال (٨ - ٤) :

نفس السبب فى عدم حدوث التفاعل النوى التالى :

$$d + d \rightarrow \alpha + z^0 \quad "??"$$

الحل :

هذا التفاعل غير ممنوع بحدوثه لأن التفاعلات النووية التي من هذا القبيل تفاعلات قوية (Strong Interactions) بمعنى أنها يجب أن تتفق مع قانون حفظ كمية الحركة المغزلية للجزء "T" بجانب مركبتها "T_z" . وبما أن التفاعل اعلاه ينتج أن الحالة الابتدائية تتميز بأن لها "T = 0" بينما الحالة النهائية تتميز بأن لها "T = 1" إذا لا يمكن أن يتم كتفاعل قوى .

مثال (٨ - ٥) :

وضِّح كيفية تعيين الحركة المغزلية للميزون بـ (pi - Meson) باستخدام التفاعلين التوحيين التاليين :



الحصل :

بتطبيق معادلة على التفاعل (pp) نجد أن :

$$\sigma_{(pp \rightarrow d \pi^+)} = \frac{p_d^2}{v_p v_\pi} \cdot \left| H_{f',i}^{(1)} \right|^2 (2 S_\pi + 1)(2 S_d + 1) \quad (8.30)$$

حيث " $\vec{p}_\pi = -\vec{p}_d$ " في نظام مركز الكتلة " $S_d = 1$ " و " $S_\pi = 0$ "

بينما تطبيق نفس المعادلة على التفاعل ($\pi^+ d$) يؤدي الى :

$$\sigma_{(\pi^+ d \rightarrow pp)} = (\frac{1}{2}) \frac{p_d^2}{v_\pi v_p} \left| H_{f',i}^{(1)} \right|^2 (2 S_p + 1)^2 \quad (8.31)$$

ونذكر أنفسنا انه عند طاقة محددة في نظام مركز الكتلة فان " مبدأ الاتسازان التفصيلي (Detailed-Balance Principle) تؤكد ان لكلا التفاعلين " الاماي pp " و " العكسي " π^+d الكميتين $(|H_{fi}^{(1)}|^2 / v_i v_f)$ متساويتان . اما المعامل " $\frac{1}{2}$ " فقد نتج من ان عملية اجراء التكامل على معامل حيز الطور (Phase Space Factor) dn^*/dE — على نصف الحيز المتاح يعطى جميع الحالات الممكنة لتواجد اثنين من الجسيمات المتشابهة وهما البروتونين وعلى ذلك :

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow \pi^+d)}{\sigma(\pi^+d \rightarrow pp)} = 2 \cdot \frac{(2S_\pi + 1)(2S_d + 1)}{(2S_p + 1)^2} \cdot \frac{p_\pi^2}{p_p^2} \quad (8.32)$$

ولقد اوضحت التجارب العملية ان :

$$\sigma(pp \rightarrow \pi^+d) = (3.1 \pm 0.3) \text{ m.b}$$

$$\sigma(\pi^+d \rightarrow pp) = (0.18 \pm 0.06) \text{ m.b}$$

عند استخدام قذائف بروتونية ذات طاقة (340 Mev) اى ان طاقة حركة الميزون باى في نظام مركز الكتلة يساوى $p_\pi c = 22.3 \text{ Mev}$ والاخرى باستخدام ميزونات طاقة حركتها 23 Mev (وهذه تقابل طاقة حركة للبروتون في نظام مركز الكتلة مساوية للقيمة 85 Mev) :

أى ان :

$$\frac{p_\pi}{p_p} = \sqrt{\frac{2m_B}{2m_p E_p}} \quad 0.20$$

$$\therefore (0.18 \text{ mb}) = (3.1 \text{ mb}) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot (2S_\pi + 1) \cdot (0.04)$$

$$\therefore 2 S_{\pi} + 1 \sim 1$$

$$\therefore S_{\pi} = 0 \quad (8.33)$$

مثال (٨ - ٦) :

احسب النسبة بين التفاعلين النوويين التاليين اذا علم ان الطاقة الكلية نفسى نظام مركز الكتلة لكل منهما مساو للآخر :

$$\frac{\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+)}{\sigma(n + p \rightarrow d + \pi^0)}$$

الحل :

اول ما نلاحظه في هذا المثال ان الحالة النهائية لأى من التفاعلين الموضحين تتميز بأن لها نفس مضاغط كمية الحركة المغزلية • معنى ذلك أنه بقى لنا ان نركز النقاش على تأثير كمية الحركة المغزلية النظرية • وفى هذا الخصوص يتضح لنا ما يلى :

• كمية الحركة المغزلية النظرية للحالة النهائية لكل منهما تساوى الوحدة " $T = 1$ " •

• كمية الحركة المغزلية النظرية للحالة الابتدائية للتفاعل الاول (pp) تساوى الوحدة كذلك •

• كمية الحركة المغزلية النظرية للطاقة الابتدائية للتفاعل الثانى (np) ناتجة من انطباق " $T = 0$ " و " $T = 1$ " - راجع معادلة

$$\therefore \Phi_{1,0} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right]$$

$$\Phi_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned}\Phi_{1,0} - \Phi_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}] - [\psi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}] \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [2 \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}] \\ &= \sqrt{2} [\psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}]\end{aligned}$$

$$\therefore \psi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_{1,0} - \Phi_{0,0}]$$

وبما ان الموكبة $(\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{1,0})$ لا تلعب اى دور هنا لأن كل رأينا الحالة النهائية للتفاعلين لها $\tau = 1$ ، والحالة (πp) لها سعة $1/\sqrt{2}$ من تلك الخاصة بالطاقة (pp) .

وبما ان القطع المستمر يتناسب مع مربع السعة اذا يتقح ان :

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow d \pi^+)}{\sigma(np \rightarrow d \pi^0)} = 2 \quad (8.33)$$

انتهى بفضل الله سبحانه وتعالى

"وان تعهّدوا نعمة الله لاتنصروهم"

والحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين

أ.د. عبدالرحمن فكرى أ.د. محمد عبدالهادى
القاهرة

أول المحرم ١٤١٣ - ٢ يوليو ١٩٩٢

(REFERENCES) المراجع

<u>TITLE</u>	<u>AUTHOR</u>	<u>YEAR</u>
Lectures on Quantum Mechanics	BAYM	1969
Elementary Nuclear Physics	BETHE and MORRISON	1956
Nuclear Physics "Theoretical"	BLATT and WEISSKOPF	1952
Quantum Mechanics	BOHM	1951
Nuclear Structure	BOHR and MOTTELSON	1969
Atomic Physics	BORN	1955
Theory of Atomic Spectra	CONDON and SHORTLEY	1935
Method of Mathematical Physics	COURANT and HILBERT	1953
Quantum Mechanics	DIRAC	1955
Angular Momentum in Quantum Mechanics	EDMONDS	1957
Nuclear Physics	FERMI	1950
The Feynman Lectures in Physics	FEYNMAN, LEIGHTON and SANDS	1965
Problems of Modern Physics	FRENCH	1958
"ميكانيكا الكم" الجزء الاول	محمد عبد الباقى وعبد الرحمن فكرى	١٩٨٦
Quantum Mechanics	GHATAK and LOKANATHAN	1975
Electronic and Ionic Impact Phenomena	GILBODY	1969
Classical Mechanics	GOLDSTEIN	1951
The Optical Model of the Nucleus	HODGSON	1963

The Physics of Elementary Particles	JACKSON	1958
Theoretical Physics	JOOS	1958
Fundamental Principles of Quantum Mechanics	KEHLE	1939
Int. to Solid State Physics	KITTEL	1971
Quantum Mechanics	KRAMERS	1970
Quantum Mechanics	LANDAU and LIPSHITZ	1968
Fundamentals of Elementary Particle Physics	LONGO	1973
Classical Mechanics of Particles and Systems	MARION	1970
Physics of Nuclei and Particles	MARMIER and SHELDON	1969
Quantum Mechanics	MATHLEWS	1963
Quantum Mechanics	MERZBACHER	1961
Methods of Theoretical Physics (I,II)	MORSE and FESHBACH	1953
The Theory of Atomic Collisions	MOTT and MASSEY	1949
Classical Electricity and Magnetism	PANOPSKY	1955
Introduction to Quantum Mechanics	PARK	1974
Introduction to High Energy Physics	PERKINS	1972

Molecular Beams	RAMSEY	1963
Int. to Modern Physics	RICHTMEYER and COOPER	1969
Quantum Mechanics	SCHIFF	1956
Modern Analysis	WHITTAKER and WATSON	1927

رقم الايداع بدار الكتب

١٩٩٤ / ١٩٩٢ م

997-00-3971-3



2

Bibliotheca Alexandrina



0392588